Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2023 - Varianta $\boxed{\text{A}}$

Clasa a XI-a

(10pt) **1.** Progresia aritmetică $(x_n)_{n\geq 1}$ satisface: $x_1 = 15$ şi $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{21} = 21$. Să se calculeze x_6.

a) 6 b) 8 c) 10 d) 11 e) 12 f) $\frac{33}{5}$

(10pt) **2.** Fie punctele $A(-7,3)$ şi $B(2,5)$. Să se determine abscisa punctului C situat pe prima bisectoare pentru care suma $CA + CB$ este minimă.

a) $\frac{43}{20}$ b) $\frac{25}{12}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{29}{13}$ e) $\frac{11}{5}$ f) $\frac{23}{11}$

(10pt) **3.** Să se afle câte numere $z = a + bi \in \mathbb{C}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$, au proprietatea $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

(10pt) **4.** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = x\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - 2x\right).$$

a) $y = 0$ b) $y = -\frac{2}{3}$ c) $y = \frac{2}{9}x$ d) $y = \frac{2}{9}$ e) $y = -\frac{2}{9}$ f) nu există

(10pt) **5.** Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ verifică relaţia $2023AB = A + B$, să se calculeze determinantul matricei $AB - BA - I_3$, unde I_3 este matricea unitate.

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2023 e) -2023 f) nu este unic determinat

6. Dacă $\sin x + \sin y = \sqrt{\frac{5}{3}}$, iar $\cos x + \cos y = 1$, să se calculeze:

(3p) a) $12\cos(x - y)$.

(7p) b) $12\cos(x + y)$.

7. În transmiterea informaţiei printr-o reţea de comunicaţie pachetele de informaţie trec printr-un număr de calculatoare (routere) în loc să fie transmise direct de la expeditor la destinatar. În cazul de faţă, o reţea de comunicaţie are calculatoarele dispuse în locaţiile de coordonate întregi (i, j) ale unui pătrat $[0, 8] \times [0, 8]$, adică $i, j = \overline{0, 8}$. Orice pachet de informaţie pleacă din nodul $(0, 0)$ şi este transmis spre nodul $(8, 8)$ printr-o rută de noduri intermediare, astfel: fiecare calculator (router) transmite pachetul fie în sus, fie la dreapta sa.

(4p) a) Fie n numărul de moduri în care poate fi transmis un pachet de informaţie astfel încât să fie verificate condiţiile de mai sus. Să se determine suma cifrelor lui n.

(6p) b) Să se calculeze probabilitatea ca router-ul din poziţia $(4, 3)$ să participe la transferul unui pachet de informaţie din nodul $(0, 0)$ spre nodul $(8, 8)$. (Rezultatul final va fi dat sub forma unei fracţii ireductibile).

8. Fie matricea $A(x) = \begin{bmatrix} 2^x & -1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ 1 & 2^x & 2^x \end{bmatrix}$, $m, x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Pentru $m = 4$, să se determine x pentru care $det(A(x)) = 0$.

(8p) b) Să se afle mulţimea tuturor valorilor lui m pentru care $A(x)$ este inversabilă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

9. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0 > 0$ şi $x_{n+1}x_n^2 - x_n^3 - x_n + x_{n+1} - 1 = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze:

(3p) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

(7p) b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$.

(10pt) **10.** Fie $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ o funcţie continuă cu proprietăţile $f(0) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - f(nx)}{x^2} = n^2$, pentru $n \in \{1, 2, 3\}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - f(x)\cdot\sqrt{f(2x)}\cdot\sqrt[3]{f(3x)}}{x^2}$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 5 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte.

La ultimele 5 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 150 minute.