

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2023 - Varianta A
Clasa a XII-a

(10pt) **1.** Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care mulțimea soluțiilor ecuației

$$\sqrt{mx^2 - x + 1} + \sqrt{mx^2 + x + 1} = x$$

este vidă.

- a) \emptyset b) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ c) $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ d) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ f) $\left\{0, \frac{1}{4}\right\}$

(10pt) **2.** Să se determine suma soluțiilor ecuației:

$$(\log_x 6)^2 + \left(\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{x}\right)^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{6} + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

- a) $\frac{1 + 6\sqrt{6}}{36}$ b) $\frac{6\sqrt{6} - 5}{36}$ c) $\frac{1 + 2\sqrt{6}}{12}$ d) $\frac{2\sqrt{6} - 1}{36}$ e) $\frac{2\sqrt{6} - 1}{12}$ f) $\frac{3 + 2\sqrt{6}}{12}$

(10pt) **3.** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\pi \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

- a) $\frac{\pi^3}{3}$ b) $-\frac{2\pi^3}{3}$ c) $-\frac{\pi^2}{3}$ d) $\frac{2\pi^2}{3}$ e) -1 f) $-\frac{\pi^2}{4}$

(10pt) **4.** Se consideră sistemul liniar

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

și următoarele afirmații:

- P1.* Dacă $a = \sqrt{2}, b = \sqrt[3]{3}, c = \sqrt[4]{4}, d = \sqrt[5]{5}$ sistemul este compatibil determinat.
P2. Dacă $a = b = c = d = \sqrt[7]{7}$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat.
P3. Dacă $a = b = c = d = 1$ sistemul este incompatibil.
P4. Dacă $a = b = \sqrt{2}, c = d = \sqrt[3]{3}$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat.
P5. Dacă $a = b = \sqrt{2}, c = \sqrt[3]{3}, d = \sqrt[4]{4}$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat.
P6. Dacă $a = b = c = \sqrt{2}, d = \sqrt[3]{3}$ sistemul este compatibil determinat.

Care dintre răspunsurile de mai jos conține toate afirmațiile adevărate?

- a) P_1, P_2, P_4 b) P_3, P_4 c) P_1, P_5 d) P_2, P_4, P_5 e) P_1, P_2, P_5 f) P_3, P_5

(10pt) **5.** Să se determine polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, de grad minim, care îndeplinește următoarele condiții:

- $P + 2$ este divizibil prin $(X - i)^2$ și
 $P - 2$ este divizibil prin $(X - 1)^3$.

- a) $2X^6 - 6X^5 - 9X^4 + 12X^3 + 12X^2 - 6X - 3$ b) $2X^5 + 9X^4 - 12X^3 + 2X^2 - 6X + 7$
c) $2X^6 - 4X^5 - 9X^4 + 12X^3 + 6X^2 - 6X - 3$ d) $2X^5 - 9X^4 + 12X^3 + 2X^2 - 6X + 7$
e) $2X^6 - 6X^5 + 9X^4 - 12X^3 + 12X^2 - 6X + 3$ f) $X^5 - 9X^4 + 13X^3 + 2X^2 - 6X + 7$

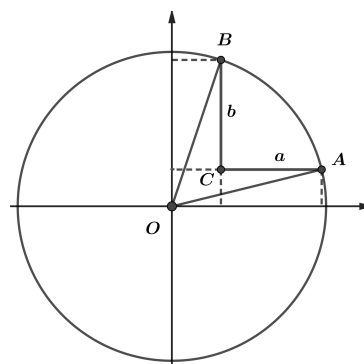
(10pt) 6. Să se determine $x \in \mathbb{R}, x > 1$, ce verifică relația

$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} x = \frac{7\pi}{4}.$$

7. Fie A și B două puncte pe cercul trigonometric precum în figura alăturată, cu $AC = a = \frac{3}{5}$ și $BC = b = \frac{4}{5}$, iar AC și BC sunt paralele cu axele de coordonate.

(2p) a) Să se calculeze $\cos \widehat{AOB}$.

(8p) b) Să se calculeze $30x_C - 40y_C$, unde (x_C, y_C) sunt coordonatele punctului C .



(10p) 8. Să se calculeze limita șirului $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $S_n = \sum_{k=1}^n \left(C_{k+2023}^k \right)^{-1}$.

9. Pe mulțimea numerelor naturale se definește o lege de compoziție "*" care îndeplinește, pentru orice x și y naturale, următoarele relații:

(i) $x * 0 = x$,

(ii) $x * y = y * x$,

(iii) $(x + 1) * y = (x * y) + y + 1$.

(4p) a) Să se rezolve ecuația $(x + 1) * (x - 1) = 2023$.

(6p) b) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 2023$.

10. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

(5p) a) Fie F acea primitivă a funcției f cu proprietatea $F(-\cos \alpha) = 0$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \alpha \cdot F(x)$.

(5p) b) Să se studieze existența limitei $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 f(x) dx$ și, în caz afirmativ, să se precizeze valoarea sa.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 5 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte.

La ultimele 5 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 150 minute.