

Concursul Național de Matematică “Valeriu Alaci” - 2016, etapa finală
Clasa a IX-a, Secțiunea Matematică-Informatică
Varianta A

- (10pt) **1.** Știind că x și y sunt numere reale diferite care verifică relația $x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}$, cât este $x \cdot y$?
- a) 1/4 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) 3 f) 4
- (10pt) **2.** Dacă numerele reale x, y satisfac relația $|x + y| + |x - y| = 2$, care este valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$?
- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9
- (10pt) **3.** Pe o sârmă se pun becuțe colorate astfel: verde, roșu, roșu, verde, verde, verde, roșu, roșu, roșu, roșu, verde, verde, verde, verde, verde, ș.a.m.d., fiecare grup de becuțe de o anumită culoare conținând cu un becuț mai mult decât precedentul grup. Al 2016-lea becuț va fi:
- a) primul becuț dintr-un grup de becuțe verzi
b) primul becuț dintr-un grup de becuțe roșii
c) ultimul becuț dintr-un grup de becuțe verzi
d) ultimul becuț dintr-un grup de becuțe roșii
e) un becuț aflat în interiorul unui grup de becuțe verzi
f) un becuț aflat în interiorul unui grup de becuțe roșii
- (10pt) **4.** Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 1. Atunci vectorul $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ are lungimea (modulul):
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6
- (10pt) **5.** Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a - b)$.
- a) 3/8 b) -3/8 c) 1/8 d) -1/8 e) 1/2 f) -1/2
- (10pt) **6.** Câte funcții $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ verifică relația $f(x) \cdot f(y) \cdot f(x - y) = 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) o infinitate
- (10pt) **7.** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $[x]^3 + \{x\}^3 = x^3$.
- (10pt) **8.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică și notăm $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă pentru $p, m \in \mathbb{N}^*$, $m \neq p$, au loc relațiile $S_m = p$ și $S_p = m$, aflați S_{m+p} în funcție de m și p .
- (10pt) **9.** Care este valoarea expresiei
- $$E = 3 \left(\left[\frac{2}{3} \right] + \left[\frac{2^2}{3} \right] + \dots + \left[\frac{2^{2016}}{3} \right] \right) + 3026?$$
- (10pt) **10.** Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ și $x_n x_{n-2} + x_{n-1} = 2$, pentru $n \geq 3$. Calculați $x_1 + x_2 + \dots + x_{2016}$.
- (10pt) **11.** a) Câte soluții întregi are ecuația $|x| + |y| = 10$? (4pt)
b) Câte soluții întregi are inecuația $|x| + |y| < 10$? (6pt)
- Se va considera că, pentru $x \neq y$, soluțiile (x, y) și (y, x) sunt diferite.

(10pt) **12.** a) Câte numere de două cifre conțin măcar o cifră de 2 în scrierea lor în baza 10? (3p)

b) Câte numere de trei cifre conțin măcar o cifră de 3 în scrierea lor în baza 10? (7p)

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului “Nu știu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
 Editia a II-a, 2016, Faza Finală-Varianta A

Secțiunea MATEMATICĂ - INFORMATICĂ Clasa IX-a	
Numele _____	Prenumele _____
Școala _____	Localitatea _____
Semnătura _____	Punctaj _____

1.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
2.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
3.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
4.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
5.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
6.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
7.		$\mathbb{Z} \cup (0,1)$ (10pt)														
8.		-m-p (10pt)														
9.		2^{2017} (10pt)														
10.		2016 (10pt)														
11.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">a)</td> <td style="width: 80px; height: 40px; border: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">b)</td> <td style="width: 80px; height: 40px; border: 1px solid black;"></td> </tr> </table>	a)		b)		40 (4pt) 181 (6pt)										
a)																
b)																
12.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">a)</td> <td style="width: 80px; height: 40px; border: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">b)</td> <td style="width: 80px; height: 40px; border: 1px solid black;"></td> </tr> </table>	a)		b)		18 (3pt) 252 (7pt)										
a)																
b)																