

Concursul Național de Matematică “Valeriu Alaci” - 2016, etapa finală
Clasa a IX-a, Secțiunea Științe ale Naturii/Tehnologic/Economic
Varianta A

(10pt) **1.** Știind că x și y sunt numere reale diferite care verifică relația $x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}$, cât este $x \cdot y$?

- a) $1/4$ b) $1/2$ c) 1 d) 2 e) 3 f) 4

(10pt) **2.** O cultură de bacterii crește cu o rată de 20% pe oră. Știind că inițial cultura conține 10^4 bacterii, determinați numărul bacteriilor după 10 ore.

- a) $10^4 \cdot (6/5)^9$ b) $10^4 \cdot (6/5)^{10}$ c) $10^4 \cdot 6/5$ d) $10^4 \cdot (1/5)^9$ e) $10^4 \cdot (1/5)^{10}$ f) $(10^4)^{10} \cdot 1/5$

(10pt) **3.** Pe o sârmă se pun becuțe colorate astfel: verde, roșu, roșu, verde, verde, verde, roșu, roșu, roșu, roșu, verde, verde, verde, verde, verde, ș.a.m.d., fiecare grup de becuțe de o anumită culoare conținând cu un becuț mai mult decât precedentul grup. Al 2016-lea becuț va fi:

- a) primul becuț dintr-un grup de becuțe verzi
 b) primul becuț dintr-un grup de becuțe roșii
 c) ultimul becuț dintr-un grup de becuțe verzi
 d) ultimul becuț dintr-un grup de becuțe roșii
 e) un becuț aflat în interiorul unui grup de becuțe verzi
 f) un becuț aflat în interiorul unui grup de becuțe roșii

(10pt) **4.** Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 1. Atunci vectorul $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ are lungimea (modulul):

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

(10pt) **5.** Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a - b)$.

- a) $3/8$ b) $-3/8$ c) $1/8$ d) $-1/8$ e) $1/2$ f) $-1/2$

(10pt) **6.** Mușimea soluțiilor reale ale inecuației $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{x + 1}{x - 1}$ este:

- a) \mathbb{R} b) \emptyset c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ d) $(1, \infty)$ e) $[1, \infty)$ f) $\{2\}$

(10pt) **7.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ ax + b, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

să aibă următoarea proprietate: orice $y \in [0, 3]$ este imaginea unei singure valori $x \in [0, 3]$.

(10pt) **8.** În triunghiul ABC , A' , B' , C' sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ și, respectiv, $[AB]$. Fie punctul M astfel încât $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{BB'}$. Determinați valoarea parametrului real m pentru care $\overrightarrow{MA} = m \overrightarrow{CC'}$.

(10pt) **9.** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $|x - 4|(7 - |x + 4|) \geq 0$.

(10pt) **10.** Care este mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\frac{\{x\}}{[x]} = x$?

(10pt) **11.** a) Câte soluții întregi are ecuația $|x| + |y| = 10$? (4pt)

b) Câte soluții întregi are inecuația $|x| + |y| < 10$? (6pt)

Se va considera că, pentru $x \neq y$, soluțiile (x, y) și (y, x) sunt diferite.

(10pt) **12.** Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați x_5 ; (2pt)

b) Calculați $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2016}$. (8pt)

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului “Nu știu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
 Editia a II-a, 2016, Faza Finală-Varianta A

Secțiunea ȘTIINȚE ALE NATURII/TEHNOLOGIC/ECONOMIC Clasa IX-a	
Numele _____	Prenumele _____
Școala _____	Localitatea _____
Semnătura _____	Punctaj _____

1.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">a</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">b</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">c</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">d</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">e</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">f</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
2.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">a</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">b</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">c</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">d</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">e</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">f</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
3.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">a</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">b</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">c</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">d</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">e</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">f</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
4.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">a</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">b</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">c</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">d</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">e</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">f</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
5.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">a</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">b</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">c</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">d</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">e</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">f</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
6.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">a</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">b</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">c</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">d</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">e</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">f</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: black; width: 15px; height: 15px;"></td> <td style="width: 15px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
7.		$a=-1, b=4$ (10pt)														
8.		$m=1$ (10pt)														
9.		$[-11,3] \cup \{4\}$ (10pt)														
10.		$\{-1/2\}$ (10pt)														
11.		40 (4pt)														
		181 (6pt)														
12.		2 (2pt)														
		1 (8pt)														