

**Concursul Național de Matematică "Valeriu Alaci" - 2016, etapa finală**  
**Clasa a X-a, Secțiunea Matematică-Informatică, VARIANTA A**

(10pt) **1.** Determinați domeniul maxim de definiție  $D$  al funcției  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x-1}}{x^2 - 3x + 2}$ .

- a)  $(2, \infty)$     b)  $[1, \infty)$     c)  $(1, 2) \cup (2, \infty)$     d)  $(1, 2)$     e)  $(1, \infty)$     f)  $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

(10pt) **2.** Calculați valoarea expresiei  $E = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} - \sqrt{2}$ .

- a)  $2\sqrt{11}$     b)  $\sqrt{7} - \sqrt{2}$     c)  $\sqrt{2}$     d)  $0$     e)  $2\sqrt{2}$     f)  $1 - \sqrt{2}$

(10pt) **3.** Notăm cu  $x_1$  cea mai mare soluție negativă și cu  $x_2$  cea mai mică soluție pozitivă a ecuației  $\ln(\operatorname{tg}(x - |x - \frac{\pi}{4}|)) = 0$ . Atunci  $x_1 + x_2$  este egal cu:

- a)  $\frac{\pi}{4}$     b)  $0$     c)  $\frac{3\pi}{4}$     d)  $\frac{\pi}{8}$     e)  $\frac{\pi}{2}$     f)  $-\frac{\pi}{4}$ .

(10pt) **4.** Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ ,  $a > b > 1$ , pentru care notăm  $A = \log_a(a - b)$ ,  $B = \log_b(a - b)$ . Dacă  $a^2 + b^2 = 3ab$ , atunci  $A + B = \dots$

- a)  $AB$     b)  $-AB$     c)  $A^2B^2$     d)  $\sqrt{AB}$     e)  $2AB$     f)  $-2AB$ .

(10pt) **5.** În sistemul de axe  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 1)$ ,  $B(-2, -3)$ ,  $C(2, -2)$ . Punctul  $M$  pentru care suma  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  este minimă este

- a)  $A$     b)  $M(0, -5)$     c)  $M(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3})$     d)  $O$     e)  $M(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$     f) ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

(10pt) **6.** Un robot se deplasează cu viteza de 1 metru/secundă ( $m/s$ ) astfel: 1s spre est, 2s spre nord, 3s spre vest, 4s spre sud, 5s spre est etc. La ce distanță (în metri) va fi de punctul inițial după 2016s ?

- a)  $\sqrt{2113}m$     b)  $64m$     c)  $31\sqrt{2}m$     d)  $32\sqrt{2}m$     e)  $\sqrt{1985}m$     f)  $64\sqrt{2}m$

(10pt) **7.** Fie funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Calculați valoarea sumei  $S = \sum_{k=1}^{2016} [f(k)]$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a lui  $x$ .

(10pt) **8.** Câte perechi de numere naturale nenule  $(a, b)$ , cu  $a < b$ , au proprietatea

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{a} + \operatorname{arctg}\frac{1}{b} = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} ?$$

(10pt) **9.** Determinați cea mai mică valoare a lui  $a \in \mathbb{R}$  pentru care ecuația  $a(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$  are cel puțin o soluție în intervalul  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

**10.** Fie  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  vârfurile unui pentagon regulat, iar  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  astfel încât  $\sin 2t = \sin 3t$ .

(3pt) a) Calculați  $|z^5 - 1|$ , unde  $z = \cos t + i \sin t$ ;

(7pt) b) Determinați  $m \in \mathbb{R}$ , dacă  $A_1A_3 = m(1 + \sqrt{5})A_1A_2$ .

**11.** Pentru orice  $a \in \mathbb{R}^*$  notăm cu  $P_a$  punctul de intersecție al dreptelor  $AB$  și  $CD$ , unde  $A(a - 1, 0)$ ,  $B(0, a + 1)$ ,  $C(a + 2, 0)$ ,  $D(0, a - 2)$ , și cu  $d_a$  distanța de la  $O(0, 0)$  la  $P_a$ .

(3pt) a) Determinați valoarea lui  $a^2$  pentru care dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt perpendiculare;

(7pt) b) Calculați valoarea minimă a lui  $d_a$ .

**12.** Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  cu proprietățile  $|z_1| = 1$ ,  $|z_2| = 2$ ,  $|z_3| = 3$ ,  $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + z_2| = |z_2 + z_3| = |z_3 + z_1|$ . Notăm  $E = (z_1 + z_2 + z_3)(\frac{1}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{9}{z_3})$ .

(3pt) a) Calculați  $E - \bar{E}$ ;

(7pt) b) Aflați valoarea lui  $E$ .

**Notă.** Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,  
 Ediția a II-a, 2016, Faza Finală

**A**

Secțiunea MATEMATICĂ - INFORMATICĂ Clasa X-a, VARIANTA A

1.	a b c d e f Nu știu	(10pt)
2.	a b c d e f Nu știu	(10pt)
3.	a b c d e f Nu știu	(10pt)
4.	a b c d e f Nu știu	(10pt)
5.	a b c d e f Nu știu	(10pt)
6.	a b c d e f Nu știu	(10pt)
7.	<input type="text"/> 18120	(10pt)
8.	<input type="text"/> 3	(10pt)
9.	<input type="text"/> $\sqrt{2}$	(10pt)
10.	a) <input type="text"/>	2 (3pt)
	b) <input type="text"/>	$\frac{1}{2}$ (7pt)
11.	a) <input type="text"/>	2 (3pt)
	b) <input type="text"/>	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (7pt)
12.	a) <input type="text"/>	0 (3pt)
	b) <input type="text"/>	7 (7pt)