

Concursul Național de Matematică "Valeriu Alaci" - 2016, etapa finală
Clasa a X-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnologic, Economic, VARIANTA A

(10pt) **1.** Câte numere naturale n au proprietatea $25^n - 6 \cdot 5^n + 5 \leq 0$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5 f) ∞

(10pt) **2.** În urma unor măsurători experimentale s-au obținut următoarele perechi de date de forma $(x; y)$: $(1;3)$, $(2;5)$ și $(4;17)$. Dacă se caută o dependență de forma $y = a^x \cdot b + c$, $a, b, c > 0$, atunci c este egal cu:

- a) 2 b) 4 c) 3 d) 1 e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

(10pt) **3.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fixat. Rezolvați ecuația $n^x + (n+1)^x + (n^2+n)^x = (n^2+n+1)^x$.

- a) -2 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2 f) 4

(10pt) **4.** Calculați $|z|$ dacă $\bar{z} + |z| = 1 - 3i$, $z \in \mathbb{C}$.

- a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 3 e) $\sqrt{3}$ f) 5

(10pt) **5.** Un mobil se îndepărtează rectiliniu de poziția inițială, distanța față de aceasta fiind dată de legea $f(t) = \sqrt{t^2 + 7t}$ (*metri*), unde $t \in [0, \infty)$ reprezintă timpul exprimat în secunde (*s*). După câte secunde distanța față de origine este mai mare de 11 metri?

- a) 4s b) 5s c) 6s d) 7s e) 8s f) 9s

(10pt) **6.** Determinați mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1} - x + m$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

- a) \emptyset b) $[1, \infty]$ c) $(\frac{3}{4}, 1]$ d) $(\frac{3}{4}, 2)$ e) $(\frac{3}{4}, \infty)$ f) $(0, 1]$

(10pt) **7.** Punctele $O(0, 0)$, $A_1(1, \frac{5}{2})$, $A_2(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $A_3(4, 5)$, $A_4(\frac{11}{2}, \frac{9}{2})$, $A_5(7, \frac{15}{2})$, $A_6(5, \frac{17}{2})$ reprezintă poziția stelelor ce formează constelația numită "Carul mare". Dacă $P(a, b)$ este punctul corespunzător Stelei Polare din constelația "Carul mic", calculați $5a + 2b$ (A_5, A_6, P sunt coliniare în această ordine și $PA_6 = 5A_6A_5$).

(10pt) **8.** Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ distincte cu $|z_1| = |z_2| = 2, |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 z_3 \in \mathbb{R}^*$. Calculați $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

(10pt) **9.** Determinați valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care $X + Y = mXY$, unde $X = \log_{32} 2016$, $Y = \log_{63} 2016$.

10. Se consideră expresia $E(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - a$, unde $x \in \mathbb{R}$, iar a este un parametru real.

(3pt) a) Aflați valoarea lui a dacă $E(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$;

(7pt) b) Determinați cea mai mare valoare a lui a pentru care există x astfel încât $E(x) = 0$.

11. Fie f^{-1} inversa funcției $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{dacă } n = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{|n|}{2n}(4n-1) & , \text{dacă } n \neq 0 \end{cases}$.

(3pt) a) Calculați $f^{-1}(2)$;

(7pt) b) Aflați valoarea sumei $\sum_{k=1}^{2016} f^{-1}(k)$.

12. Un punct $P(\alpha, \beta)$ se mișcă în plan astfel ca $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 6\beta + 14 = 0$, unde α și β iau toate valorile reale și pozitive posibile. Dreapta d de ecuație $3x - 4y - 24 = 0$ intersectează axele de coordonate Ox , Oy respectiv în punctele A și B .

(3pt) a) Pentru $\alpha = 5$, calculați aria triunghiului ABP ;

(7pt) b) Determinați α astfel ca punctul P să fie cel mai aproape de axa Oy .

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
 Ediția a II-a, 2016, Faza Finală

A

Secțiunea ȘTIINȚELE NATURII, TEHNOLOGIC, ECONOMIC Clasa X-a , VARIANTA A

1.	a	b	c	d	e	f	Nu știu	(10pt)	
2.	a	b	c	d	e	f	Nu știu	(10pt)	
3.	a	b	c	d	e	f	Nu știu	(10pt)	
4.	a	b	c	d	e	f	Nu știu	(10pt)	
5.	a	b	c	d	e	f	Nu știu	(10pt)	
6.	a	b	c	d	e	f	Nu știu	(10pt)	
7.	<input type="text"/>							2	(10pt)
8.	<input type="text"/>							4	(10pt)
9.	<input type="text"/>							1	(10pt)
10.	a)	<input type="text"/>					$\frac{1}{2}$	(3pt)	
	b)	<input type="text"/>					1	(7pt)	
11.	a)	<input type="text"/>					1	(3pt)	
	b)	<input type="text"/>					1008	(7pt)	
12.	a)	<input type="text"/>					21	(3pt)	
	b)	<input type="text"/>					1	(7pt)	