

Concursul Național de Matematică Valeriu Alaci
Ediția a II-a, 2016, Etapa Finală
Clasa a XI-a, Secțiunea Matematică-Informatică, VARIANTA A

(10pt) **1.** Numărul soluțiilor ecuației $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \in S_7$ este:

- a) 2 b) 1 c) ∞ d) 3
 e) 4 f) ecuația nu are soluții g) nu știu

(10pt) **2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a & x = 0. \end{cases}$$

Determinați mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care f are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} .

- a) $\{0, 1\}$ b) $[0, 1]$ c) $\{-1, 1\}$ d) $[-1, 1]$
 e) $[0, \infty)$ f) \emptyset g) nu știu

(10pt) **3.** Fie șirul $a_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k! \pi}{120}$. Atunci limita lui a_n are valoarea:

- a) 0 b) $\sin \frac{\pi}{5}$ c) $\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{20}$ d) nu există
 e) $\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{20} + \sin \frac{\pi}{60} + \sin \frac{\pi}{120}$ f) ∞ g) nu știu

(10pt) **4.** Pentru orice $a, n \in \mathbb{N}$ notăm $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + an + 2016}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x . Să se găsească $f(\mathbb{N})$.

- a) $f(\mathbb{N}) = \emptyset$ b) $f(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$ c) $f(\mathbb{N}) = [0, 1]$ d) $f(\mathbb{N}) = \{0, \frac{1}{2}\}$
 e) $f(\mathbb{N}) = \{\frac{1}{2016}\}$ f) $f(\mathbb{N}) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ g) nu știu

(10pt) **5.** Aflați numărul minim de elemente nule care, aflate în orice poziție a unui determinant de ordinul 2016 de numere reale, determină ca valoarea acestuia să fie zero.

- a) 2016 b) $2015 \cdot 2016$ c) $2015 \cdot 2016 + 1$ d) 2015^2
 e) 2016^2 f) 2016^{2015} g) nu știu

(10pt) **6.** Fie sistemul liniar:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = b \\ -x + ay + 2z = 3 \\ 3x + 4z = c, \end{cases}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) Dacă $b \neq c$ sistemul este incompatibil;
 b) Dacă $a = -10$ și $b = c = 1$ sistemul este compatibil determinat;
 c) Dacă $a \neq -10$ și $b = c$ sistemul este compatibil nedeterminat;
 d) Dacă $a = -10$ și $b = c \neq 1$ sistemul este compatibil nedeterminat;
 e) Dacă $a \neq -10$ și $b = c \neq 1$ sistemul este incompatibil;
 f) Dacă $a \neq -10$ și $b = c = 2$ sistemul este incompatibil.
 g) Nu știu.

(10pt) 7. Calculați suma elementelor matricei A^{2016} , unde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(10pt) 8. Fie determinantul

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze $D(\sqrt{2016})$.

(10pt) 9. Pentru ce valoare a parametrului real t , funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{tx^3}{1+x^2}$ are în punctul $x = 1$ graficul tangent unei drepte care este paralelă cu prima bisectoare?

(10pt) 10. Fie determinantul $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}, a, b > 0.$

a) (3 pt) Calculați $\frac{\Delta_2}{\Delta_3}$.

b) (7 pt) Pentru $a = 1$ și $b = 2$, calculați Δ_n .

(10pt) 11. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ notăm cu x_n unica soluție reală a ecuației $x^3 + 2x + 3 = \frac{1}{n^2+1}$.

Să se calculeze:

a) (4 pt) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n + 1)$;

b) (6 pt) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n + 1)$.

(10pt) 12. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_0 = a \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Calculați:

a) (5 pt) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+2]{x_{n+2}}$;

b) (5 pt) $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
 Ediția a II-a, 2016, Etapa Finală, VARIANTA A

Secțiunea MATEMATICĂ - INFORMATICĂ Clasa a XI-a	
Numele _____	Prenumele _____
Școala _____	Localitatea _____
Semnătura _____	Punctaj _____

1.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
2.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
3.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
4.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
5.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
6.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: #cccccc; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
7.		$3 \cdot 2^{2016}$	(10pt)													
8.		$2016 \cdot 2015^4$	(10pt)													
9.		1	(10pt)													
10.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; vertical-align: top;">a)</td> <td style="width: 130px; height: 40px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; vertical-align: top;">b)</td> <td style="width: 130px; height: 40px;"></td> </tr> </table>	a)		b)		$\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}$	(3pt)									
a)																
b)																
		$2^{n+1} - 1$	(7pt)													
11.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; vertical-align: top;">a)</td> <td style="width: 130px; height: 40px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; vertical-align: top;">b)</td> <td style="width: 130px; height: 40px;"></td> </tr> </table>	a)		b)		0	(4pt)									
a)																
b)																
		$\frac{1}{5}$	(6pt)													
12.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; vertical-align: top;">a)</td> <td style="width: 130px; height: 40px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; vertical-align: top;">b)</td> <td style="width: 130px; height: 40px;"></td> </tr> </table>	a)		b)		1	(5pt)									
a)																
b)																
		1	(5pt)													