

**Concursul Național de Matematică Valeriu Alaci**  
**Ediția a II-a, 2016, Etapa Finală**  
**Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnic, Economic, VARIANTA A**

(10pt) **1.** Fie matricile  $A \in M_2(\mathbb{R})$  și  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  astfel încât  $\det(A^{2016} + iB) = 0$ , unde  $i^2 = -1$ . Să se calculeze  $\Delta = |\det A|$ .

- a)  $\Delta = 0$                       b)  $\Delta = 1$                       c)  $\Delta = \sqrt[2016]{2}$                       d)  $\Delta = 2^{2016}$   
 e)  $\Delta = 2016$                       f)  $\Delta = 2017$                       g) nu știu

(10pt) **2.** Fie determinanții de ordinul 3 cu elemente reale, care au elementele de pe diagonala principală egale cu  $\sqrt[3]{2016}$ , iar suma elementelor de pe fiecare linie și coloană egală cu  $2\sqrt[3]{2016}$ . Cea mai mică dintre valorile acestor determinanți este:

- a) 0                                  b) 2016                                  c)  $\sqrt[3]{2016}$                                   d)  $2\sqrt[3]{2016}$   
 e) 1008                                  f) -2016                                  g) nu știu

(10pt) **3.** Fie sistemul liniar:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = b \\ -x + ay + 2z = 3 \\ 3x + 4z = c, \end{cases}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ . Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) Dacă  $b \neq c$  sistemul este incompatibil;  
 b) Dacă  $a = -10$  și  $b = c = 1$  sistemul este compatibil determinat;  
 c) Dacă  $a \neq -10$  și  $b = c$  sistemul este compatibil nedeterminat;  
 d) Dacă  $a = -10$  și  $b = c \neq 1$  sistemul este compatibil nedeterminat;  
 e) Dacă  $a \neq -10$  și  $b = c \neq 1$  sistemul este incompatibil;  
 f) Dacă  $a \neq -10$  și  $b = c = 2$  sistemul este incompatibil.  
 g) Nu știu.

(10pt) **4.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă pe  $\mathbb{R}$  cu  $f'(0) \neq 0$ . Calculați

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}.$$

- a)  $\frac{f(0)-f'(0)}{f'(0)}$                       b)  $\frac{f(0)+f'(0)}{f'(0)}$                       c)  $\frac{f(0)}{f'(0)}$                       d)  $\frac{f(0)-f'(0)}{2f'(0)}$   
 e)  $\frac{e-f'(0)}{f'(0)}$                       f)  $\frac{e+f'(0)}{f'(0)}$                       g) nu știu

(10pt) **5.** Să se determine parametrii reali  $a$  și  $b$  astfel încât:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - ax^2 - bx + 2}) = 1.$$

- a)  $a = 10, b = 2$       b)  $a = 12, b = 2$       c)  $a = 12, b = 4$       d)  $a = -10, b = 2$   
 e)  $a = 8, b = 4$       f)  $a = 6, b = 2$       g) nu știu

(10pt) **6.** Valoarea determinantului

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2}{1+x^2} + 2 & \frac{2}{1+x^2} + 5 & \frac{2}{1+x^2} + 3 \\ -2x & 1 - 5x & -3x \\ 4 & 7 + x & 5 \end{vmatrix}, x \in \mathbb{R},$$

este:

- a)  $D = \frac{2}{1+x^2}$       b)  $D = x$       c)  $D = 0$       d)  $D = -x$   
 e)  $D = -\frac{2}{1+x^2}$       f)  $D = x - \frac{2}{1+x^2}$       g) nu știu

(10pt) **7.** Fie matricea  $A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ . Calculați  $A^{2014} + A^{2015} + A^{2016}$ , exprimând rezultatul în funcție de matricea  $A$ .

(10pt) **8.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-a \sin x}{2x-\pi}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor reale ale lui  $a$  pentru care funcția este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

(10pt) **9.** Pentru ce valoare a parametrului real  $t$ , funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{tx^3}{1+x^2}$  are în punctul  $x = 1$  graficul tangent unei drepte care este paralelă cu prima bisectoare?

(10pt) **10.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = p \cdot x - q\sqrt{|x^2 - 1|}, p \neq q$ . Știind că funcția  $f$  admite ca asimptote dreptele  $y = 0$  și  $y = 2x$ , determinați:

(5 pt) a) Valorile parametrilor reali  $p$  și  $q$ ;

(5 pt) b) Numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f$ , pentru valorile parametrilor  $p$  și  $q$  determinate la a).

(10pt) **11.** Fie funcția  $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{9-x}$ .

(3 pt) a) Este funcția  $f$  descrescătoare?

(7 pt) b) Care dintre numerele  $A = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}$  și  $B = \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$  este mai mare?

(10pt) **12.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x$ . Știind că  $f$  este bijectivă pe  $\mathbb{R}$  și are inversa  $g$ , calculați:

(4 pt) a)  $g'(2)$ ;

(6 pt) b)  $g''(2)$ .

**Notă.** Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

**CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,**  
 Ediția a II-a, 2016, Etapa Finală, VARIANTA A

Secțiunea SN, Tehnic, Economic	Clasa a XI-a
Numele _____	Prenumele _____
Școala _____	Localitatea _____
Semnătura _____	Punctaj _____

<b>1.</b>	a b c d e f Nu știu		(10pt)
<b>2.</b>	a b c d e f Nu știu		(10pt)
<b>3.</b>	a b c d e f Nu știu		(10pt)
<b>4.</b>	a b c d e f Nu știu		(10pt)
<b>5.</b>	a b c d e f Nu știu		(10pt)
<b>6.</b>	a b c d e f Nu știu		(10pt)
<b>7.</b>	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	$-2^{2013}(2 + 3i)A$	(10pt)
<b>8.</b>	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	$a \in R$	(10pt)
<b>9.</b>	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	$t = 1$	(10pt)
<b>10.</b>	a) <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	$p=1, q=-1$	(5pt)
	b) <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	3	(5pt)
<b>11.</b>	a) <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	Nu	(3pt)
	b) <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	B	(7pt)
<b>12.</b>	a) <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	$\frac{1}{6}$	(4pt)
	b) <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	$-\frac{5}{54}$	(6pt)