

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
Editia a II-a, 2016, Faza Finală, Matematică-Informatică
Varianta A

(10pt) **1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{(x - \cos t)^2 + \sin^2 t}} dt.$$

Aria figurii plane determinată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = a$ și $x = b$, cu $1 < a < b$, este:

- a) $\ln \frac{a}{b}$ b) 1 c) π d) $\ln \frac{2}{3}$ e) $\ln \frac{b}{a}$ f) $2 \ln \frac{b}{a}$

(10pt) **2.** Valoarea parametrului real $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, pentru care

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = \frac{4\sqrt{3} \ln 2}{3}$$

este:

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{3\pi}{16}$

(10pt) **3.** Considerăm funcțiile $f, g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = |x^2 - x|$. Precizați care din următoarele afirmații este corectă:

- a) g nu este integrabilă b) g este primitivabilă
c) g este o primitivă a lui f d) $g' = |f|$ pe intervalul $[-1, 2]$
e) $|f|$ este derivabilă f) g este discontinuă.

(10pt) **4.** Fie \mathbb{Z}_{16} inelul claselor de resturi modulo 16. Determinați perechea (n_1, n_2) unde n_1 și n_2 reprezintă respectiv, numărul de rădăcini al ecuațiilor

$$x^2 = \widehat{1}, \quad x^2 + \widehat{13}x + \widehat{1} = \widehat{0}.$$

- a) (0, 2) b) (2, 4) c) (4, 0) d) (2, 2) e) (2, 0) f) (4, 2)

(10pt) **5.** Fie G mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile pe \mathbb{R} care verifică relația $f'(x) + 2f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, înzestrată cu operația de adunare a funcțiilor. Atunci:

- a) $(G, +)$ este grup necomutativ b) G nu este parte stabilă față de ” + ”
c) $(G, +)$ este grup abelian d) $(G, +)$ este monoid, dar nu e grup
e) legea ” + ” nu are element neutru f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ este element în G .

(10pt) **6.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție " \star " prin $x \star y = \frac{1}{4}xy - 2x - 2y + 24$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Calculați

$$\log_2 2 \star \log_2 3 \star \log_2 4 \star \dots \star \log_2 2014 \star \log_2 2015 \star \log_2 2016.$$

- a) 2016 b) 2015 c) 12 d) 8 e) 0 f) $\log_2 2017$

(10pt) **7.** Calculați integrala

$$I = \int_{-1}^2 \frac{\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} dx$$

și determinați apoi coeficienții a, b, c, d pentru care

$$I = \frac{\pi}{2} \left(a \arcsin \frac{2}{\pi} + b \arcsin \frac{1}{\pi} + c\sqrt{\pi^2 - 1} + d\sqrt{\pi^2 - 4} \right) - \pi^2.$$

(10pt) **8.** Fie f un polinom cu coeficienți reali. Restul împărțirii lui f la $X^3 - 2$ este egal cu pătratul câtului. Să se afle câtul știind că $f(-2) + f(2) + 34 = 0$.

(10pt) **9.** Calculați aria domeniului mărginit, cuprins între parabola $y = x^2 - 4x$ și dreapta $y = x - 4$.

(10pt) **10.** Rădăcinile polinomului

$$f = 2X^7 - 2X^6 + 3X^5 + 23X^4 - 21X^3 + 14X^2 + 32X + 10$$

sunt notate cu $x_i, i = \overline{1, 7}$. Calculați produsul $E = \prod_{i=1}^7 \frac{1}{1 + x_i}$.

(5+5pt) **11.** Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{|\cos(2 \arccos x)|}$; calculați

- a) aria suprafeței mărginite de axa Ox , graficul funcției f și dreptele $x = -1, x = 1$;
b) volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției f .

(3+7pt) **12.** Fie \mathbb{Z}_8 inelul întregilor modulo 8 și $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_8)$ mulțimea matricilor pătrate cu elemente din \mathbb{Z}_8 .

a) Este matricea $M = \begin{pmatrix} \widehat{7} & \widehat{3} \\ \widehat{2} & \widehat{4} \end{pmatrix}$ inversabilă?

b) $(X, Y) \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_8) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_8)$ reprezintă o pereche de divizori ai lui zero dacă $X \cdot Y = O$ sau $Y \cdot X = O$, deși ambele sunt nenule (unde am notat cu O matricea nulă). Câte perechi distincte de divizori ai lui zero conțin matricea $M = \begin{pmatrix} \widehat{7} & \widehat{3} \\ \widehat{2} & \widehat{4} \end{pmatrix}$?

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
Ediția a II-a, 2016, Faza Finală – **Varianta A**

Secțiunea MATEMATICĂ - INFORMATICĂ Clasa a XII-a	
Numele _____	Prenumele _____
Școala _____	Localitatea _____
Semnătura _____	Punctaj _____

1.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
2.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
3.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
4.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
5.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
6.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
7.		$a=b=c=d=1$ (10pt)														
8.		$-2X + 1$ (10p)														
9.		$\frac{9}{2}$ (10p)														
10.		$-\frac{2}{29}$ (10pt)														
11.		$\frac{2}{3}$ (5pt)														
a)		$\frac{2\pi}{\sqrt{15}}(\sqrt{2} + 1)$ (5pt)														
b)																
12.		nu (3pt)														
a)																
b)		5 (7pt)														