

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
Editția a II-a, 2016, Faza Finală, Secțiunea Științele Naturii, Tehnic, Economic
Varianta A

(10pt) **1.** Valoarea integralei

$$\int_2^4 \frac{|x-3|}{3x^2-4x+1} dx$$

este

a) $\frac{4}{3} \ln 5 + \ln 92$

b) $\ln \frac{4}{3}$

c) $\frac{4}{3} \ln 55 - \ln 192$

d) $\ln 46$

e) $\frac{4}{3} \ln 11 - \ln 5$

f) 0

(10pt) **2.** Calculați

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2014} x \sin 2x dx.$$

a) $I = \frac{3^{1007} - 2^{1007}}{1007 \cdot 2^{2015}}$

b) $I = \frac{3^{1007} - 2^{1007}}{2016 \cdot 2^{2015}}$

c) $I = \frac{3^{1008} - 2^{1008}}{1008 \cdot 2^{2016}}$

d) $I = \frac{1}{2016 \cdot 2^{2016}}$

e) $I = \frac{1}{2014 \cdot 2^{2015}}$

f) $I = \frac{3^{2016} - 2^{2016}}{2016 \cdot 2^{2015}}$

(10pt) **3.** Mulțimea primitivelor funcției $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$, $x \in \mathbb{R}$ este:

a) $F(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^x}) + C$

b) $F(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C$

c) $F(x) = \ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C$

d) $F(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) + C$

e) $F(x) = \ln(e^{2x} + \sqrt{1+e^x}) + C$

f) $F(x) = \ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-x}}) + C.$

(10pt) **4.** Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc legile de compoziție $x \star y = \frac{1}{4}xy - 2x - 2y + 24$, și $x \circ y = x + y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă e_1 și e_2 sunt elementele neutre în raport cu legea " \star ", respectiv " \circ ", calculați

$$[(e_1 \star e_2) \circ 2016] \star (e_2 \star 8) \star [2016 \star (e_2 \circ e_1)].$$

a) e_1

b) e_2

c) 8

d) 2016

e) 4034

f) 4032

(10pt) **5.** Câte polinoame de grad cel mult 4 sunt în inelul $\mathbb{Z}_2[X]$?

a) 2

b) 4

c) 8

d) 16

e) 32

f) 64

(10pt) **6.** Se consideră grupul (\mathcal{M}, \bullet) , unde $\mathcal{M} = \left\{ A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\}$ și fie " \bullet " operația de înmulțire a matricelor. Simetricul elementului $A(2016)$ este:

a) $A(0)$

b) $A(4032)$

c) $A(-4032)$

d) $A(-2016)$

e) $A\left(\frac{1}{2016}\right)$

f) $A(-1)$

(10pt) 7. Calculați integrala

$$\int_0^{\ln \frac{1}{2}} \frac{e^{3x} - e^x}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 1} dx.$$

(10pt) 8. Calculați aria domeniului mărginit, cuprins între parabola $y = 2 + x - x^2$ și axa Ox .

(10pt) 9. Fie A un inel cu proprietatea $x^6 = x$, pentru orice $x \in A$. Să se calculeze x^2 .

(3+7pt) 10. Se consideră

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- Determinați I_3 ;
- Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

(3+7pt) 11. Se consideră polinoamele $P(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ și $Q(X) = X^3 + 3X + 1$.

- Calculați restul împărțirii $P : Q$.
- Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui Q atunci determinați valoarea sumei: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$.

(5+5pt) 12. a) Determinați valorile parametrilor a și b pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ este izomorfism între corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și corpul $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, unde $x \oplus y = x + y - 2$, respectiv $x \odot y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

- Precizați elementele neutre din corpul $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,
 Ediția a II-a, 2016, Faza Finală – **Varianta A**

Secțiunea SN, Tehnologic, Economic - Clasa a XII-a	
Numele _____	Prenumele _____
Școala _____	Localitatea _____
Semnătura _____	Punctaj _____

1.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
2.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
3.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
4.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
5.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
6.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">f</td><td style="text-align: center;">Nu știu</td> </tr> <tr> <td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="background-color: black; width: 20px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	b	c	d	e	f	Nu știu								(10pt)
a	b	c	d	e	f	Nu știu										
7.		$\ln \frac{6}{5}$ (10pt)														
8.		$\frac{9}{2}$ (10p)														
9.		x (10p)														
10.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: center;">a)</td> <td style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px;"></td> <td style="width: 10%; text-align: right;">$\frac{5}{6} - \ln(2)$ (3pt)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">b)</td> <td style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px;"></td> <td style="text-align: right;">0 (7pt)</td> </tr> </table>	a)		$\frac{5}{6} - \ln(2)$ (3pt)	b)		0 (7pt)									
a)		$\frac{5}{6} - \ln(2)$ (3pt)														
b)		0 (7pt)														
11.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: center;">a)</td> <td style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px;"></td> <td style="width: 10%; text-align: right;">$-4(X^2 + X + 1)$ (3pt)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">b)</td> <td style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px;"></td> <td style="text-align: right;">12 (7pt)</td> </tr> </table>	a)		$-4(X^2 + X + 1)$ (3pt)	b)		12 (7pt)									
a)		$-4(X^2 + X + 1)$ (3pt)														
b)		12 (7pt)														
12.	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: center;">a)</td> <td style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px;"></td> <td style="width: 10%; text-align: right;">a=4, b=2 (5pt)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">b)</td> <td style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px;"></td> <td style="text-align: right;">$e_1 = 2, e_2 = 6$ (5pt)</td> </tr> </table>	a)		a=4, b=2 (5pt)	b)		$e_1 = 2, e_2 = 6$ (5pt)									
a)		a=4, b=2 (5pt)														
b)		$e_1 = 2, e_2 = 6$ (5pt)														