Concursul Naţional de Matematică "Valeriu Alaci" - 2017, etapa online
Clasa a XII-a, Secţiunea Matematică-Informatică

1. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$\boxed{\text{a)}}$ $F(x) = -\ln\left(x + 2 + 2\sqrt{x^2+x+1}\right) + \ln(2x) + C$;
b) $F(x) = -\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C$;
c) $F(x) = \ln\left(x + 2 + 2\sqrt{x+1}\right) - \ln x + C$;
d) $F(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}\right) + C$.
e) $F(x) = -\ln\left(x + 2 + 2\sqrt{x^2+x+1}\right) - \ln(2x) + C$;
f) $F(x) = \ln\left(x + 2 + 2\sqrt{x+1}\right) + \ln x + C$.

2. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}} \sin^2 x \cdot \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$.

a) $I = \ln 2$; $\boxed{\text{b)}}$ $I = 0$; c) $I = 1$; d) $I = \ln\sqrt{3}$; e) $I = -\ln 2$; f) $I = 2\ln 2$.

3. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x\,dx$$

a) $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$; b) $I = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3}$; $\boxed{\text{c)}}$ $I = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$; d) $I = \frac{\pi}{4}$; e) $I = 1$; f) $I = \pi$.

4. Să se calculeze

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\,dx$$

$\boxed{\text{a)}}$ $I = \frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{4}{3}$; b) $I = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{4}{3}$; c) $I = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$; d) $I = \frac{8}{9\sqrt{3}} + 1$ e) $I = \frac{8}{9\sqrt{3}} - 1$; f) $I = \frac{8}{9\sqrt{3}} + 2$.

5. Fie

$$F(x) = \int_0^{\arctan x} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}dt.$$

Precizaţi care din afirmaţiile următoare este adevărată:

a) $F'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$; b) $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; c) $F(x)$ are două puncte de extrem local
d) $F(x)$ este monoton descrescătoare pentru $x \geq 0$; $\boxed{\text{e)}}$ $\lim\limits_{x\to 2} F'(x) = \dfrac{1}{25}$; f) toate afirmaţiile sunt false.

6. Dacă

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (a\sin x - b\cos^2 x + c)dx = 3 + \frac{\pi}{4},$$

atunci:

a) $a = 2, \ b = 3, =1$; b) $a = 2, \ b = 5, c = 1$; c) $a = \sqrt{2}, \ b = 3, \ c = 1$; $\boxed{\text{d)}}$ $a = \sqrt{2}, \ b = 8, \ c = 5$;
e) $a = b = c = 1$; f) $a = 1, \ b = 7, \ c = 5$.

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $G = \{A^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Mulţimea G împreună cu înmulţirea matricelor este grup izomorf cu grupul:

$\boxed{\text{a)}}$ $(\mathbb{Z}_4, +)$; b) grupul lui Klein $(K, \cdot)$, unde $K = \{e, a, b, c\}$, $x^2 = e,\ \forall x \in K$;

c) $(S, \cdot)$, unde $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$;

d) $(U(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$, unde $U(\mathbb{Z}_{12})$este mulţimea elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$;
e) $(\mathbb{Z}_3, +)$; f) grupul permutărilor de ordinul 3.

8. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea asociativă $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$. Să se calculeze

$$E = 1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ ... \circ \sqrt{250}.$$

a) $E = 0$; b) $E = \sqrt{250}$; c) $E = 1$; d) $E = 21$; e) $E = 9$; $\boxed{\text{f)}}$ $E = 3$.

9. Fie $\mathbb{Z}_8$ mulţimea claselor de resturi modulo 8 înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire. Studiaţi inversabilitatea matricii $M = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{7} \\ \widehat{2} & \widehat{5} \end{pmatrix}$ şi, dacă este cazul, calculaţi $\left(M^3\right)^{-1}$.

a) M nu este inversabilă; *b)* $\left(M^3\right)^{-1} = -M$; *c)* $\left(M^3\right)^{-1} = -M^2$;

$\boxed{\text{d)}}$ $\left(M^3\right)^{-1} = M$; *e)* $\left(M^3\right)^{-1} = M^2$; *f)* $\left(M^3\right)^{-1} = M^3$.

10. Fie $\mathbb{Z}_8$ mulţimea claselor de resturi modulo 8 înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire. Precizaţi numărul n al soluţiilor sistemului $\begin{cases} \widehat{2}x + \widehat{4}y & = & \widehat{6} \\ \widehat{6}x + \widehat{4}y & = & \widehat{2} \end{cases}$.

a) $n = 4$; $\boxed{\text{b)}}$ $n = 16$; *c)* $n = 0$;

d) $n = 12$; *e)* $n = 8$; *f)* $n = 1$.

11. Fie $G = \left\{ A(x) \,|\, A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}$. Ştiind că G împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor de ordinul trei este grup, atunci simetricul elementului $A(2017)$ în acest grup este:
a) $A(-2017)$; b) $A\left(-\frac{2017}{4033}\right)$; $\boxed{\text{c)}}$ $A\left(\frac{2017}{4033}\right)$; d) $A\left(\frac{1}{2017}\right)$; e) $A\left(-\frac{1}{2017}\right)$; f) $A(-1)$.

12. Calculaţi limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2 x}{(1 + n^2x^2)\ln n} dx$.
a) $L = 0$; $\boxed{\text{b)}}$ $L = 1$; c) $L = 3$; d) $L = \ln 2$; e) $L = 2$; f) L nu există.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La toate subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.