

Concursul Național de Matematică "Valeriu Alaci" - 2017, etapa online
Clasa a XII-a, Secțiunea Științe ale Naturii/Tehnologic/Economic

1. Primitiva funcției $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ al cărei grafic trece prin punctul $A(e^2, 2017)$ este funcția $F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

- a) $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2015$ b) $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2016$ c) $F(x) = \ln x + 2013$ d) $F(x) = \frac{2}{x} + 2017 - e^2$
 e) $F(x) = -\frac{2\ln x + 1}{2x^2} + 2015$ f) f nu admite primitive.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_4^5 \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 2x - 60}{x - 3} - ax \right) dx = \frac{184}{3} + \ln 512$$

- a) $a = 6$; b) $a = 3$; c) $a = 2$; d) $a = \frac{1}{2}$; e) $a = \frac{1}{3}$; f) $a = \frac{1}{6}$.

3. Să se determine mulțimea primitivelor funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{2x} + 1}$$

- a) $F(x) = -e^{-x} - \arctg e^x + C$; b) $F(x) = e^{-x} - \arctg(e^x + 1) + C$; c) $F(x) = -e^{-x} - \arctg(e^{2x} + 1) + C$;
 d) $F(x) = -e^{-x} - \ln(e^{2x} + 1) + C$; e) $F(x) = -e^{-x} + \ln(e^{2x} + 1) + C$; f) $F(x) = -e^{-x} + \arctg e^x + C$.

4. Să se calculeze

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

- a) $I = \ln \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $I = \ln \sqrt{3}$; c) $I = \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $I = \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $I = \ln \frac{\sqrt{3}}{9}$; f) $I = \ln 3$.

5. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$$

- a) $I = \frac{1}{2} (\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2})$; b) $I = \ln(1 + \sqrt{2})$; c) $I = \ln 2 + \sqrt{2}$; d) $I = \frac{1}{2} (\ln(1 + \sqrt{2}))$;
 e) $I = \frac{1}{2} (\ln(1 + \sqrt{2}) + 2)$; f) $I = \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$.

6. Să se calculeze

$$I = \int_0^1 x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

- a) $I = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $I = \frac{3}{4} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4}$; c) $I = \frac{3}{4} \ln 2$; d) $I = \frac{3}{4} \ln(1 + \sqrt{2})$; e) $I = 1$; f) $I = \sqrt{2}$.

7. Fie \mathbb{Z}_8 mulțimea claselor de resturi modulo 8 înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire. Determinați matricea pătratică de ordinul al doilea X ce verifică egalitatea $X \cdot \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{2} \\ \widehat{5} & \widehat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{3} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{5} \\ \widehat{3} & \widehat{1} \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{3} \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{5} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$;

d) $X = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{5} \\ \widehat{3} & \widehat{3} \end{pmatrix}$; e) $X = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{3} & \widehat{3} \end{pmatrix}$; f) Nu există.

8. În inelul claselor de resturi modulo 6 suma $\hat{2}^{2015} + \hat{3}^{2010} + \hat{4}^{2015} + \hat{5}^{2012}$ este egală cu:

a) $\hat{0}$; b) $\hat{1}$; c) $\hat{2}$; d) $\hat{3}$; e) $\hat{4}$; f) $\hat{5}$.

9. Fie \mathbb{Z}_8 mulțimea claselor de resturi modulo 8 înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire. Precizați numărul n al soluțiilor sistemului
$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{7} \\ \hat{6}x + \hat{5}y = \hat{1} \end{cases}.$$

a) $n = 2$; b) $n = 1$; c) $n = 6$;

d) $n = 0$; e) $n = 8$; f) $n = 4$

10. Se consideră pe \mathbb{R} legea de compoziție $x \circ y = 2xy - ax - by$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă legea de compoziție este asociativă atunci numărul $1 \circ (-2)$ este egal cu:

a) -5 ; b) -4 ; c) -3 ; d) -2 ; e) -1 ; f) 1 .

11. Se consideră pe \mathbb{Z} legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$. Atunci elementul neutru al legii considerate este egal cu:

a) $-\frac{7}{2}$; b) 7 ; c) $\frac{7}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) nu există; f) 21 .

12. Calculați limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n+x}{(1+x)^n} dx$.

a) $L = \ln \sqrt{2}$; b) $L = 2$; c) $L = 0$;

d) $L = \ln 2$; e) $L = 1$; f) Nu există.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La toate subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.