

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2017, etapa online
Clasa a X-a, Secțiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Fie $f : [-1, 2] \rightarrow [a, b]$, $f(x) = b^2x + \frac{a}{3}$. Valoarea sumei $a + b \in \mathbb{R}$ pentru care f este inversabilă este :

- a) -1 b) $-\frac{2}{3}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 1

(10pt) **2.** Determinați cel mai mare număr întreg x cu proprietatea

$$2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2017} < \frac{1}{2}.$$

- a) -2021 b) -2020 c) -2019 d) -2018 e) -2017 f) -4034

(10pt) **3.** Imaginea geometrică din cadranul al doilea a soluției ecuației $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ are coordonatele polare

- a) $\left(\sqrt[4]{2}; \frac{7\pi}{12}\right)$ b) $\left(\sqrt[8]{3}; \frac{5\pi}{2}\right)$ c) $\left(\sqrt[4]{2}; \frac{11\pi}{12}\right)$ d) $\left(\sqrt[4]{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ e) $\left(\sqrt[4]{2}; \frac{11\pi}{12}\right)$ f) $\left(\sqrt[4]{4}; \frac{7\pi}{12}\right)$

(10pt) **4.** Valoarea raportului $\frac{\ln 15}{\lg 15}$ este

- a) $\frac{e}{10}$ b) 1 c) 15 d) $\lg e$ e) $\ln 10$ f) $-\lg e$

(10pt) **5.** Suma modulelor soluțiilor ecuației $(5 + \sqrt{24})^{\sqrt{x+1}} + (5 - \sqrt{24})^{\sqrt{x+1}} = 98$ este egală cu

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

(10p) **6.** Se notează cu w suma modulelor numerelor complexe z ce au proprietatea că $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ și $|z|$ sunt numere întregi consecutive (ordinea nu este fixată; se consideră toate posibilitățile). Calculați w .

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 10 e) 11 f) 12

(10p) **7.** Se consideră punctele A, B, C cu afixele $z_A = 6 + 5i$, $z_B = 7 - 3i$, $z_C = -2 + 4i$. Dacă $z_M = a + bi$ este afixul centrului cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci valoarea sumei $a + b$ este egală cu:

- a) -1 b) 2 c) -2 d) 1 e) 0 f) 3

(10p) **8.** Fie $M = \{x \in \mathbb{Z} : 2x + 1 < 3 \log_3(x + 5)\}$. Precizați numărul elementelor lui M .

- a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6 f) o infinitate

(10p) **9.** Viteza de cădere liberă a unei persoane ce sare dintr-un avion este dată de legea

$$v(t) = 50(1 - e^{-0,2t}) \text{ m/s,}$$

unde timpul t este exprimat în secunde. După cât timp viteza devine 40 m/s ?

- a) 5 s b) $\ln 25 \text{ s}$ c) $5 \ln 5 \text{ s}$ d) $5 \ln \frac{9}{5} \text{ s}$ e) $2 \ln 5 \text{ s}$ f) $-\ln \frac{1}{5} \text{ s}$

(10p) **10.** Fie numărul real x cu proprietatea

$$(x + 1)^{\log_3(x-2)} + 2(x - 2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3.$$

Care afirmație este adevărată?

- a) $x \in (2, 4]$ b) $x \in (4, 7]$ c) $x \in (7, 12]$ d) $x \in (12, 14]$ e) $x \in (14, 17]$ f) $x \in (17, \infty)$

(10p) **11.** Pentru funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in [0, 1] \\ ax - 1 & , \quad x \in (1, 2] \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$, decideți care afirmație este corectă:

- a) f injectivă $\Leftrightarrow f$ strict monotonă b) f surjectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă
c) $f([0, 2]) = [0, 3] \Rightarrow f$ injectivă d) f injectivă $\Leftrightarrow a \geq 2$
e) $a = 2 \Rightarrow f$ surjectivă f) f injectivă $\Leftrightarrow f([0, 2])$ este interval închis

(10p) **12.** Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ și $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$, $f(x) = \frac{x + m}{x^2 + x + 1}$ să fie surjectivă. Determinați valoarea produsului $a \cdot b$.

- a) -1 b) $-\frac{1}{3}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 1

Răspunsuri:

1. c; 2. b; 3. a; 4. e; 5. c; 6. f; 7. f; 8. d; 9. c; 10. c; 11. c; 12. b.