

Concursul Național de Matematică "Valeriu Alaci" - 2017, etapa online
Clasa a IX-a, Secțiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** O tabla de sah 5×5 , cu patratele colorate alternativ in alb si negru, are colturile negre. Pentru fiecare pereche de patratele colorate diferit (nu neaparat invecinate), se deseneaza cate un segment care uneste centrul patratelului negru cu centrul patratelului alb. Cate segmente au fost desenate?

- a) 156 b) 50 c) 100 d) 150 e) 130 f) 125 g) nu știu

(10pt) **2.** Cate solutii are in \mathbb{R} ecuatia $[2x] - \{x\} = x$ daca $[x]$ reprezinta partea inteaga a lui x , iar $\{x\}$ partea fractionara a lui x ?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) o infinitate g) nu știu

(10pt) **3.** Se considera un patrat de arie S_1 . Mijloacele laturilor acestui patrat sunt varfurile unui alt patrat, a carui arie o notam cu S_2 . In acelasi mod, construim succesiv un sir de patrate ale caror arii le notam cu $(S_n)_{n \geq 1}$. (La fiecare pas construim patratul de arie S_n ca fiind patratul care are drept varfuri mijloacele laturilor patratului precedent, cel de arie S_{n-1} .) Aflati cel mai mare numar natural nenul n pentru care $2017S_n \geq S_1$.

- a) $n = 2017$ b) $n = 2018$ c) $n = 2016$ d) $n = 10$ e) $n = 11$ f) $n = 1$ g) nu știu

(10pt) **4.** Se considera numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$, in aceasta ordine, in progresie aritmetica. Sa se calculeze suma $S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2017}^2 - a_{2018}^2$.

- a) $S = 0$ b) $S = \frac{2018}{2017}a_1^2$ c) $S = a_1^{2018}$ d) $S = 2018a_1^2$ e) $\frac{1009}{2017}(a_1^2 - a_{2018}^2)$
 f) $\frac{1}{2018}a_1^{2018}$ g) nu știu

(10pt) **5.** Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doua functii care satisfac simultan conditiile

$$\begin{cases} f(x+1) + 1 \leq x \leq g(x) - 3 \\ g(x-2) - 1 \leq x \leq f(x) + 2 \end{cases}, (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Atunci:

- a) $f(x) = x + 2, g(x) = x - 3$ b) $f(x) = 2x - 1, g(x) = 3x - 1$ c) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 3$
 d) $f(x) = 2x - 1, g(x) = 3x + 1$ e) $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$ f) $f(x) = x - 2, g(x) = x + 3$
 g) nu știu

(10pt) **6.** Se considera multimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Aflati cate submultimi de trei elemente ale lui A au elementele in progresie aritmetica.

- a) 2 b) 4 c) 8 d) 10 e) 14 f) 20 g) nu știu

(10pt) **7.** Sa se calculeze valoarea maxima a expresiei:

$$\frac{x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1}}{xy}, x, y \geq 1$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) Nu are o valoare maxima
 g) nu știu

(10pt) 8. Cate triplete (a, b, c) de numere intregi verifica inecuatia

$$(a - 1)(a - 3) + (b - 5)(b - 7) + (c - 9)(c - 11) < 0 ?$$

- a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19 g) nu știu

(10pt) 9. Se considera paralelogramul $ABCD$ si notam cu O intersectia diagonalelor. Bisectoarele unghiurilor DAC si DBC se intersecteaza in P . Daca $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO}$, atunci masura unghiului A este

- a) $5\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $2\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{\pi}{4}$ g) nu știu

(10pt) 10. In cate moduri se poate scrie numarul 21 ca diferenta a doua numere de trei cifre?

- a) 789 b) 798 c) 870 d) 879 e) 880 f) 882 g) nu știu

(10pt) 11. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o functie pentru care avem:

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{3}f(2017 - x) = \frac{5}{2017}x + \frac{5}{2}, (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Atunci $f(x) + f(2017 - x)$ este egal cu:

- a) 0 b) 12 c) 2012 d) 2017 e) 2019 f) 2022 g) nu știu

(10pt) 12. Se considera patrulaterul $ABCD$ si punctele M si N astfel incat

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Atunci $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}$, unde

- a) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ b) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ c) $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}$ d) $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$ e) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$
f) $a = 1, b = 1$ g) nu știu

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La toate subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.