

Concursul Național de Matematică "Valeriu Alaci" - 2017, etapa finală
Clasa a IX-a, Secțiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Care este cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care inegalitatea $(x + 2y)^2 \geq nxy$ are loc pentru orice numere reale x și y ?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8 f) nu există

(10pt) **2.** Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}$. Atunci valoarea expresiei $E(x) = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} + \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ este

- a) 0 b) 1 c) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt{13}$ e) 4 f) alt răspuns

(10pt) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1$ este:

- a) \emptyset b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\{-1, 0\}$ f) alt răspuns

(10pt) **4.** Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, un șir de numere reale, cu $a_1 = \frac{1}{2}$ și $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui n , $n > 2$ pentru care $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\} \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x .

- a) $\{3\}$ b) $\{4\}$ c) $\{3, 5\}$ d) $\{2, 3\}$ e) $\{3, 4\}$ f) alt răspuns

(10pt) **5.** Calculați media aritmetică a soluțiilor ecuației $[x] + [2x] + [3x] = 4x$.

- a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{16}$ f) 1

(10pt) **6.** În câte moduri se pot scrie cifrele 1, 2, 3 în pătratele unitate ale unui pătrat 3×3 (în fiecare pătrățel unitate se înscrie exact o cifră) astfel încât suma numerelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană să fie 5?

- a) 6 b) 9 c) 12 d) 15 e) 18 f) 21

(10pt) **7.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Câte dintre submulțimile cu trei elemente ale lui A au elementele în progresie geometrică?

(10pt) **8.** Câte perechi de funcții (f, g) , $f, g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ au proprietatea că $f(g(x)) = 1$, $\forall x \in \{1, 2, 3\}$?

(10pt) **9.** Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietățile: $f(x+1) - f(x-1) = 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f(1) = 2017$. Aflați $f(2017)$.

(10pt) **10.** Un melc pornește din punctul O și merge 1m într-o direcție, până ajunge într-un punct A_1 , apoi virează 90° la dreapta, merge 2m până în punctul A_2 , virează 90° la dreapta și merge 3m până în A_3 și așa mai departe. După ce a parcurs 41 asemenea segmente, ultimul în lungime de 41m, melcul ajunge în punctul A_{41} . Care este lungimea vectorului $\overrightarrow{OA_{41}}$?

(10pt) **11.** Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ verifică relația $1 + x^2 y^2 = 2x^3 y - 2xy$, să se calculeze valoarea numerică a expresiei

- a) $x^2 - \left(\frac{x^2 - xy - 1}{x}\right)^2 - 1$ b) $\left(\frac{x^2 y^2 - 1}{2x^2 y}\right)^2 - x^2$.

(10pt) **12.** Găsiți $x \in \mathbb{R}_+$ irațional pentru care $\frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ și $\frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5}$ sunt simultan raționale.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.