CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,

Editţia a III-a, 2017, Faza Finală, Matematică-Informatică

Varianta A

(10 pt) **1.** Să se determine numărul natural n astfel ca volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $f : [-1, 1] \to R$, $f(x) = \cos(n \arccos(x))$ în jurul axei OX să fie egal cu $\frac{2\pi}{3}$.

a) 2 b) 3 c) 0 d) 4 e) 4 f) nu există $n \in \mathbb{N}$

(10 pt) **2.** Fie $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori cu u'' continuă, pentru care $u(0) = u(1) = 1$. Calculaţi $I = \int_0^1 \left(u''(x) + \pi^2 u(x)\right) \sin \pi x dx$.

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) 2π c) $\frac{\pi}{4}$ d) $-\pi$ e) π f) $\frac{3\pi}{2}$

(10 pt) **3.** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{1024} \frac{\ln(2017 - x)}{\ln(1505^2 - (512 - x)^2)} dx.$$

a) 2017 b) 1505 c) 1024 d) 512 e) 993 f) $993 \cdot 1024$

(10 pt) **4.** Să se determine numărul de soluţii al sistemului $\begin{cases} \widehat{6}x + \widehat{2}y = \widehat{2} \\ \widehat{6}y + \widehat{2}z = \widehat{4} \\ \widehat{2}x + \widehat{6}z = \widehat{2} \end{cases}$ cu coeficienţi din inelul claselor de resturi $\mathbb{Z}_8$.

a) 16 b) 2 c) 32 d) 0 e) 64 f) 8

(10 pt) **5.** Să se determine restul împărţirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g = X^3 - 3 \in \mathbb{R}[X]$ dacă restul este egal cu pătratul câtului şi $f(1) + f(-1) + 5 = 0$.

a) $r = \left(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}\right)^2$ b) $r = (-X + 2)^2$ c) $r = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2$

d) $r = (- X + 3)^2$ e) $r = \left(-\frac{1}{2}X + 1\right)^2$ f) $r = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2$.

(10 pt) **6.** Se consideră inelul $(A, +, \cdot)$ a cărui unitate este notată cu 1 şi fie a, b două elemente ale sale. Dacă $1 - ab$ este inversabil şi $u = (1 - ab)^{-1}$ atunci $1 - ba$ este deasemenea inversabil iar $(1 - ba)^{-1}$ este unul din elementele enumerate mai jos:

a) $1 - ab$ b) $1 + aub$ c) $1 - u$ d) $1 + bua$ e) $1 - ba$ f) $1 + u$

(4 + 6 pt) **7.** Se consideră funcţiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = 3x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ şi $f_4(x) = \dfrac{3}{x}$.

(4 pt) **a)** Să se determine coordonatele punctelor din plan în care graficele funcţiilor se intersectează două câte două şi să se precizeze valoarea raportului r dintre produsul absciselor şi produsul ordonatelor acestora.

(6 pt) **b)** Să se calculeze aria domeniului mărginit, limitat de cele patru grafice.

(4 + 6 pt) **8.** Se consideră integralele

$$I_n = \int_0^1 (2017 + x^n)^n dx, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

(4 pt) **a)** Să se calculeze I_3 reprezentând rezultatul sub forma $a\,2017^3 + b\,2017^2 + c\,2017 + d$, şi să se precizeze valoarea sumei $s = a + b + c + d$.

(6 pt) **b)** Să se calculeze $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n}$.

(10 pt) **9.** Să se determine funcţiile continue $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ care verifică identitatea

$$2\ln 2 + \int_1^4 f^2\left(\sqrt{x}\right) dx = 4\int_1^2 f(x)\, dx.$$

(10 pt) **10.** Se consideră funcţiile $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x t \sin 2t \; dt$ şi $f_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\; dt$. Să se determine funcţia $h : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

(3 + 7 pt) **11.** Se consideră ecuaţia $x^3 - 3a^2x + a^3 = 0$ cu parametrul a pozitiv şi se notează cu x_1, x_2 respectiv x_3 rădăcinile sale.

(3 pt) **a)** Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

(7 pt) **b)** Calculaţi modulul determinantului $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$.

(10 pt) **12.** Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ în care elementul neutru este notat cu e iar $a^2 = e$ oricare ar fi $a \in G$. Fie $b \in G$ un element al grupului pentru care există $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ cu proprietatea $aba^{-1} = b^n$; Să se determine elementul b^{n^2-1}.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.
La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.