CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ VALERIU ALACI,

Edittţia a III-a, 2017, Faza Finală, Secţiunea Ştiinţele Naturii, Tehnic, Economic

Varianta A

(10 pt) **1.** Să se calculeze aria domeniului mărginit cuprins între graficele funcţiilor $f_1, f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = \sqrt{10x}$ şi $f_2(x) = 5x$.

a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ c) 1 d) $\frac{7}{15}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ f) 2

(10 pt) **2.** Fie $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă ce verifică identitatea $f(5-x) = f(x), \quad (\forall)\, x \in [2,3]$. Exprimaţi $\int_2^3 xf(x)\,dx$ în funcţie de numărul $I = \int_2^3 f(x)\,dx$.

a) I b) $\frac{3}{2} + I$ c) $5I$ d) $\frac{5}{2}I$ e) $4I$ f) $\frac{3}{4}I$

(10 pt) **3.** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + e^{2-x}} dx.$$

a) $I = e^2$ b) $I = 1$ c) $I = e$ d) $I = 2$ e) $I = 2e$ f) $I = e + 1$

(10 pt) **4.** Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - mX^2 + 2nX - 2$. Să se calculeze suma parametrilor m şi n ştiind că f este divizibil $X^2 - 1$.

a) $m + n = 1$ b) $m + n = 0$ c) $m + n = \frac{3}{2}$ d) $m + n = -\frac{5}{2}$ e) $m + n = \frac{1}{2}$ f) $m + n = 2$

(10 pt) **5.** Să se rezolve în inelul claselor de resturi $\mathbb{Z}_{10}$ sistemul $\begin{cases} \widehat{2}x + \widehat{3}y = \widehat{8} \\ x + \widehat{6}y = \widehat{3} \end{cases}$.

a) $(x,y) = \left(\widehat{9}, \widehat{3}\right)$ b) $(x,y) = \left(\widehat{3}, \widehat{4}\right)$ c) Nu are soluţii
d) $(x,y) = \left(\widehat{2}, \widehat{7}\right)$ e) $(x,y) = \left(\widehat{1}, \widehat{2}\right)$ f) $(x,y) = \left(\widehat{3}, \widehat{2}\right)$

(10 pt) **6.** Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3 + ax^2 + b = 0$ unde $a, b \in R^*$. Să se calculeze valoarea determinatului $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_1} \end{vmatrix}$.

a) $\frac{b}{a^2}$ b) $\frac{a^2}{b}$ c) $-\frac{b}{a^2}$ d) $-\frac{a^2}{b}$ e) $\frac{b^2}{a^2}$ f) $a - 2b^2$

(10 pt) **7.** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $f : [0, 6] \to R$, $f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}$ în jurul axei Ox.

(10 pt) **8.** Fie funcţia $f : R \to R$, primitivabilă şi F o primitivă a sa pentru care $F(0) = 1$. Să se determine expresia lui f ştiind că $F(x)f(x) = x,\ \ (\forall)\, x \in R$.

(10 pt) **9.** Să se calculeze limita $l = \lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_1^a \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$.

(4 + 6 pt) **10.** Fie integralele $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \geq 2$.

(4 pt) **a)** Să se calculeze I_4.

(6 pt) **b)** Să se calculeze nI_nI_{n-1}.

(4 +6 pt) **11.** Se consideră polinoamele $f = X^n + X^{18} + X^{17} + X^{16}$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1,\ f, g \in R\,[X]$.

(4 pt) **a)** Să se indice factorul de grad maxim din descompunerea lui g.

(6 pt) **b)** Să se determine toate valorile lui $n \in N$ astfel încât polinomul f să fie divizibil prin g.

(3 + 7 pt) **12.** Se consideră inelul $(A, +, \cdot)$ a cărui unitate este notată cu 1 şi fie a, b două elemente ale sale. Dacă $1 - ab$ este inversabil şi $u = (1 - ab)^{-1}$, se cer determinate:

(3 pt) **a)** elementul abu şi

(7 pt) **b)** inversul elementului $1 - ba$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.