Concursul Naţional de Matematică Valeriu Alaci
Ediţia a III-a, 2017, Faza Finală

Clasa a XI-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \sum\limits_{k=1}^{n} k\, \mathrm{C}_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k}{(n+1)3^n}$, atunci:

a) $l = 0$ b) $l = 1$ c) $l = \infty$ d) $l = \frac{3}{2}$

e) $l = \frac{2}{3}$ f) $l = \frac{1}{3}$

(10pt) **2.** Pentru orice număr natural $n \geq 2$ fixat, notăm cu x_n unica soluţie pozitivă a ecuaţiei

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x - \frac{n+1}{n} = 0.$$

Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 2}$.

a) nu există b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{4}$ f) 0

(10pt) **3.** Se consideră determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $\overline{xyz}$ reprezintă scrierea în baza 10 a unui număr natural de trei cifre. Valoarea lui Δ este:

a) $\Delta = 999\overline{abc}$ b) $\Delta = \overline{abc}$ c) $\Delta = 998001(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

d) $\Delta = 998001(a + b + c)^3$ e) $\Delta = 0$ f) $\Delta = 999(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$

(10pt) **4.** Ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ este:

a) $y = 0$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x - \frac{1}{2}$ d) $y = -2x - \frac{1}{2}$

e) $y = 2x + \frac{1}{2}$ f) $y = -2x + \frac{1}{2}$

(10pt) **5.** Se consideră matricea $X = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$X^{2017} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) $a = 0$, $b = 0$ b)$a = 2017$, $b = \frac{1}{2017}$ c) $a = 0$, $b = \frac{1}{2017}$ d) $a = 2017$, $b = 0$

e) $a = \frac{1}{2017}$, $b = 2017$ f) $a = 2017$, $b = 2017$

(10pt) **6.** Limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$ este:

a) $\frac{1}{4}$ b) 1 c) ∞ d) -1

e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{3}{2}$

(10pt) **7.** Să se determine câte permutări $\sigma \in S_n, n \geq 3$, satisfac condiţia ca cel puţin două din numerele

$$1 + \sigma(1), 2 + \sigma(2), \ldots, n + \sigma(n)$$

să fie distincte şi toate aceste numere să fie în progresie aritmetică în această ordine.

(10pt) **8.** Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Să se calculeze suma elementelor matricei

$$B = A - A^2 + A^3 + A^4 - A^5 + A^6 + \cdots + A^{2014} - A^{2015} + A^{2016}.$$

(10pt) **9.** Determinaţi cea mai mare valoare reală a parametrului α pentru care nu există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\alpha^n - 2017^n).$$

(10pt) **10.** Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{2017}(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiţia $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i, j, k = \overline{1, 2017}$. Calculaţi valoarea determinantului matricei A.

(10pt) **11.** Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dacă $A^n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$, să se determine:
a)(4 pt) şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$;
b)(6 pt) limita şirului $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $c_n = \dfrac{b_n}{n(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(10pt) **12.** Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$ şi $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)(1 - 2x_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi:
a)(5 pt) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;
b)(5 pt) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.
La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.