Concursul Naţional de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2017, etapa finală
Clasa a X-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Pentru numerele reale x şi y cu proprietăţile $3^{x+y} = 4$ şi $4^{x-y} = 3$, se consideră afirmaţiile:

(i) $3^{x+y} \cdot 4^{x-y} = 12^{x^2-y^2}$ $\quad (ii)$ $x^2 - y^2 > \dfrac{3}{4}$ $\quad (iii)$ $x < \dfrac{5}{4}$ $\quad (iv)$ $3^{x+y-1} = 4^{y-x+1}$ $\quad (v)$ $x > 1$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt adevărate?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

(10pt) **2.** Determinaţi mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $3^{x^2-mx} - 3^{-2(x+2)} + x^2 - (m-2)x + 4 = 0$ are două rădăcini reale şi distincte.

a) $m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ b) $m \in (-2, 6)$ c) $m \in (-3, 1)$
d) $m \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ e) $m \in (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$ f) $m \in (-\infty, -3)$

(10pt) **3.** Un punct din primul cadran situat pe o dreaptă d se numeşte ”*bine plasat*” dacă distanţa de la el la origine este un număr natural. Câte puncte ”*bine plasate*” conţine dreapta $d : x + 3y - 3\sqrt{10} = 0$?

a) 1 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

(10pt) **4.** Câte numere x de forma $\dfrac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, verifică inegalitatea $35^x - 25^x \leq 28^x + 21^x - 20^x - 15^x$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) ∞

(10pt) **5.** Funcţia $APROPIAT[x]$ returnează numărul întreg situat cel mai aproape de x. Ce va returna $APROPIAT[S(2017)]$, unde $S(1) = 0$, $S(k) = S(k-1) + \log_2 \dfrac{k^2-1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$?

a) -2017 b) -1009 c) -1008 d) -1007 e) -1 f) 0

(10pt) **6.** Fie $A = [-2017, 2017] \cap \mathbb{Z}$ şi mulţimea $M = \{(x,y) \in A \times A : |\sqrt{2x+y} + \sqrt{x+2y}\ i| = \sqrt{3}\}$. Determinaţi $S = \sum\limits_{(x,y)\in M} (|x| + |y|)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 8 f) 10

(10pt) **7.** Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(2016x) = \operatorname{tg}(2017x)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(10pt) **8.** Fie numerele complexe distincte a, b, c astfel ca $z^3 - z + 1 = (z-a)(z-b)(z-c)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Calculaţi $a^3b^3 + a^2b^2$.

(10pt) **9.** Stabiliţi valoarea sumei: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7$.

10. Fie funcţia $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5 - 4\cos x}{\sin x}$.
(3p) a) Determinaţi minimul funcţiei f.
(7p) b) Aflaţi cea mai mică valoare pozitivă a lui k pentru care ecuaţia $f(x) = k \sin x$ admite soluţii reale.

11. O bilă se deplasează în planul xOy echidistant faţă de prima bisectoare, pornind din punctul $S(-3, -2)$. În punctul $R(p, q)$ ea se ciocneşte de un obstacol rectiliniu $d : x - 2y + 7 = 0$, ricoşează şi îşi continuă deplasarea pe direcţia dreptei $d_1 : x - 10y = 0$.
(3p) a) Calculaţi $p + q$.
(7p) b) Fie A punctul de pe traiectoria bilei situat cel mai aproape de punctul $M(8, 3)$. Dacă abscisa punctului A este exprimată printr-o fracţie ireductibilă, precizaţi valoarea numărătorului ei.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z} + c|z|$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(3p) a) Pentru $b = -1$ şi $c = 0$, fie a cel mai mic număr natural nenul pentru care funcţia f este bijectivă. Calculaţi $|f(1+i)|^2$.
(7p) b) Pentru $b = -1$ şi $c = 1$, determinaţi cea mai mică valoare naturală a lui a pentru care f este injectivă.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.