

**Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2018, etapa online**  
**Clasa a XI-a, Secțiunea Matematică-Informatică**

(10pt) **1.** Să se determine parametrul  $a \in \mathbb{Q}_+$  pentru care  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{x^a}$  este un număr real nenul.

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d)  $\frac{1}{2}$                       e)  $\frac{1}{3}$                       f) 0

(10pt) **2.** Să se determine elementul  $x_{22}$  al matricei  $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \in M_3(\mathbb{Z})$  care este soluție a ecuației

$$X^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) 1                      b) -1                      c) 0                      d) 2                      e) -2                      f) 5

(10pt) **3.** Fie  $A \in M_2(\mathbb{R})$  cu  $\operatorname{tr}(A) = 1$  și  $\det(A) = 0$ , unde  $\operatorname{tr}(A)$  reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei  $A$ . Să se determine valoarea determinantului matricei  $A^2 + A + I_2$ .

- a) 0                      b) 1                      c) -1                      d) 2                      e) 3                      f) 4

(10pt) **4.** Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc - 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_+^*)$  astfel încât  $\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4$ , unde  $A^{-1}$  reprezintă inversa matricei  $A$ . Să se determine valoarea produsului  $abc$ .

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 6                      e) 12                      f)  $\frac{1}{4}$

(10pt) **5.** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

- a)  $(a+b+c)^2$                       b)  $4(a+b)(a+c)(b+c)$                       c) 0  
 d)  $2(a-b)(b-c)(c-a)$                       e)  $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$                       f)  $abc$

(10p) **6.** Să se studieze dacă următoarea limită există și, în caz afirmativ, să se determine valoarea sa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right],$$

unde  $[x]$  reprezintă partea întregă a unui număr real  $x$ .

- a) 1                      b) 0                      c)  $+\infty$                       d) nu există                      e) -1                      f)  $\frac{1}{2}$

(10p) **7.** Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^n}{x^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) 0                      b)  $+\infty$                       c)  $\frac{1}{2^n}$                       d)  $2^n$                       e)  $\cos^n(1)$                       f) 1

(10p) 8. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- a)  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$    b)  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$    c)  $\frac{n(n+1)}{2}$    d) 0   e)  $+\infty$    f)  $\frac{n^2(n+1)^2}{8}$

(10p) 9. Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_1 \in (0, 1)$  și  $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n a_n)$ .

- a) 1   b) 2   c) 0   d)  $+\infty$    e)  $\frac{1}{2}$    f)  $\frac{1}{4}$

(10p) 10. Fie

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze  $A^{2019}$ .

- a)  $I_3$    b)  $-I_3$    c)  $A$   
d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$    e)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$    f)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10p) 11. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - \sqrt[n]{1-x}}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq 2.$$

- a)  $m - n$    b)  $m \cdot n$    c)  $\frac{m+n}{m \cdot n}$    d)  $\frac{m \cdot n}{m-n}$    e)  $m + n$    f)  $\frac{n-m}{m \cdot n}$

(10p) 12. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x-2}$ . Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției  $f$ .

- a)  $x + y + 2 = 0$    b)  $y = x - 2$    c)  $y = -x - 1$   
d)  $y = -x + 2$    e)  $x = 2$    f)  $y = -x - \ln 2$

Răspunsuri:

1. c; 2. c; 3. e; 4. b; 5. b; 6. a; 7. c; 8. b; 9. a; 10. f; 11. c; 12. a.