

Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2018, etapa online
Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnologic, Economic

(10pt) **1.** Se dau punctele $A(1, 2)$, $B(5, -2)$, $C(c, 0)$, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine $c \in \mathbb{R}$ astfel încât distanța $AC + CB$ să fie minimă.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

(10pt) **2.** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul natural nenul n pentru care suma elementelor matricei A^n este 1025.

- a) 10 b) 9 c) 11 d) 8 e) 7 f) 6

(10pt) **3.** Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,3}$, $a_{ij} = \log_{i+1}(j) + 1$. Să se calculeze $(\text{tr}(A))^{\det(A)}$, unde $\text{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A .

- a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$ b) 1 c) 3
d) $\frac{1}{2} \log_2 3$ e) $\frac{3}{2} \log_3 2 + 3$ f) $\log_2 3$

(10pt) **4.** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

- a) $(a+b+c)^2$ b) $4(a+b)(a+c)(b+c)$ c) 0
d) $2(a-b)(b-c)(c-a)$ e) $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ f) abc

(10pt) **5.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc-1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât $\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4$, unde A^{-1} reprezintă inversa matricei A . Să se determine valoarea produsului abc .

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) $\frac{1}{4}$

(10p) **6.** Să se studieze dacă următoarea limită există și, în caz afirmativ, să se determine valoarea sa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right],$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real x .

- a) 1 b) 0 c) $+\infty$ d) nu există e) -1 f) $\frac{1}{2}$

(10p) **7.** Fie $a, b, c > 0$ trei numere reale pozitive astfel încât $c^2 - 4b < 0$ și funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}.$$

Să se determine suma $a + b + c$ știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 4$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$.

- a) 0 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9 f) 6

(10p) 8. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} - 2018}{x - 1}.$$

- a) 0 b) 2018 c) 2018^2 d) $1009 \cdot 2019$ e) 1009^2 f) $2018 \cdot 2019$

(10p) 9. Să se determine parametrul real m pentru care funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(mx+m)}{x^2+4x+3}, & x > -1 \\ 2mx + 1, & x \leq -1 \end{cases}$$

este continuă pe \mathbb{R} .

- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{2}{5}$ d) 0 e) $-\frac{2}{5}$ f) -1

(10p) 10. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f . Să se determine mulțimea punctelor de continuitate ale lui f .

- a) $[1, 4]$ b) $[1, 4)$ c) $(0, \infty)$ d) $[1, \infty)$ e) $(1, \infty)$ f) $[1, \infty) \setminus \{4\}$

(10p) 11. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - \sqrt[n]{1-x}}{x}, m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2.$$

- a) $m - n$ b) $m \cdot n$ c) $\frac{m+n}{m \cdot n}$ d) $\frac{m \cdot n}{m-n}$ e) $m + n$ f) $\frac{n-m}{m \cdot n}$

(10p) 12. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x-2}$. Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f .

- a) $x + y + 2 = 0$ b) $y = x - 2$ c) $y = -x - 1$
d) $y = -x + 2$ e) $x = 2$ f) $y = -x - \ln 2$

Răspunsuri:

1. d; 2. b; 3. b; 4. b; 5. b; 6. a; 7. d; 8. d; 9. c; 10. d; 11. c; 12. a.