

Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2018, etapa online
Clasa a XII-a, Secțiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Fie mulțimea $M = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$. Să se determine simetricul

elementului $A(2, 1) \in M$ în raport cu înmulțirea matricelor.

- a) $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ b) $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ c) $A(3, 1)$ d) $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e) $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ f) $A\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ g) nu știu.

(10pt) **2.** Pe mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește legea $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$, $a, b \in M$. Să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \dots * a}_{2018 \text{ elemente}} = a$.

a) $a = \ln 2017$, b) $\ln 2018$, c) $1 + \ln 2018$, d) $a \in \{1, \ln 2016\}$, e) $a = 0$, e) $a \in \{2, \ln 2019\}$, f) ecuația nu are soluții, g) nu știu.

(10pt) **3.** Se consideră grupul $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$. Atunci inversul lui $\hat{3}$ în $U(\mathbb{Z}_{47})$ este

- a) $\hat{12}$ b) $\hat{5}$ c) $\hat{43}$ d) $\hat{32}$ e) $\hat{16}$ f) $\hat{27}$ g) nu știu

(10pt) **4.** Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră legea $x * y = x^{\ln y}$, $\forall x, y \in G$. Să se calculeze $E = e * e^2 * e^3 * \dots * e^{2018}$, unde e este baza logaritmilor naturali.

- a) $E = e^{2017 \cdot 2019}$, b) $E = e^{2019!}$, c) $E = e^{2018}$, d) $E = 1$, e) $E = e^{2018!}$ f) $E = e^{2019}$, g) nu știu;

(10pt) **5.** Mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$ formează grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Să se determine funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}^*$ care realizează un izomorfism între grupurile (G, \cdot) și (\mathbb{R}^*, \cdot) .

a) $f(A(x)) = x$, b) $f(A(x)) = \frac{1}{2}x$, c) $f(A(x)) = \frac{1}{4}x$, d) $f(A(x)) = 2x$, e) $f(A(x)) = 4x$, f) $f(A(x)) = 3x$, g) nu știu.

(10pt) **6.** Fie inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ și $D = \{\hat{x} \in \mathbb{Z}_{12} \mid \hat{x} \text{ este divizor al lui zero}\}$. Să se calculeze suma elementelor din mulțimea D .

- a) $\hat{6}$ b) $\hat{2}$ c) $\hat{3}$ d) $\hat{4}$ e) $\hat{8}$ f) $\hat{10}$ g) nu știu

(10pt) **7.** Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care $\int_{-2}^3 (x + |m - x|) dx = 9$.

- a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{-1, 3\}$ c) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ g) nu știu.

(10pt) **8.** Să se calculeze integrala $\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx$.

- a) $\ln \frac{17}{5} - \arctan \frac{2}{9}$ b) 2 c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) 1 f) $\ln \frac{17}{5} - \arctan 2$ g) nu știu.

(10pt) **9.** Să se calculeze $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 + e^x)(x^2 + 1)} dx$.

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) 0 d) 1 e) $\frac{\pi}{3}$ f) π g) nu știu

(10pt) **10.** Să se calculeze integrala $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

a) $3 \ln \frac{1}{3}$ b) 1 c) $\frac{40}{9}$ d) $\arctan 3$ e) 2 f) $\frac{12}{5}$ g) nu știu.

(10pt) **11.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{t-a}{t^2+1} dt$ să admită în punctul

x_0 valoarea extremă $f(x_0) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$.

a) $a = e^2$ b) $a = -3$ c) $a = \pm 2$ d) $a = 3$ e) $a = \pm 1$ f) $a = \pi$ g) nu știu.

(10pt) **12.** Să se calculeze $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

a) $\pi \arctan \frac{1}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{4} \arctan \frac{3}{4}$ d) $\frac{\pi}{4} \arctan \frac{1}{4}$ e) 1 f) $\frac{\pi}{2} \arctan \frac{3}{4}$ g) nu știu