

Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2018, etapa online
Clasa a XII-a, Secțiunea SN

(10pt) **1.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan \sqrt{x}$. Calculați $\int f(x) dx$.

- a) $(1+x) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$ b) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ c) $\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$ d) $\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$ e) $\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$
 f) $\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}$ g) nu știu.

(10pt) **2.** Să se calculeze integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) 2 c) $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ e) 1 f) $\frac{\pi}{2}$ g) nu știu.

(10pt) **3.** Să se calculeze $I = \int_{-2}^2 \frac{\arctan x}{1 + \sin^2 x} dx$.

- a) $\frac{\pi}{2}$ 0 c) -1 d) 1 e) 2 f) $\frac{\pi}{4}$ g) nu știu.

(10pt) **4.** Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

- a) $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{1}{7}$ b) $a = \frac{4}{17}, b = -\frac{1}{17}$ c) $a = -\frac{1}{77}, b = -\frac{1}{7}$ d) $a = b = \frac{5}{17}$ $a = -\frac{1}{17}, b = \frac{4}{17}$
 f) $a = -\frac{1}{7}, b = -\frac{4}{7}$ g) nu știu.

(10pt) **5.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^x}$, $g(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^x}$. Atunci valoarea integralei $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ este

- a) $\frac{e^4 + 3e + 2}{4e}$ b) $\frac{e^5 - 3e - 2}{4e}$ c) $\frac{e^6 + 3e + 2}{2e^2}$ d) $\frac{e^6 - 3e + 2}{4e}$ $\frac{e^6 - 3e^2 + 2}{4e^2}$ f) $\frac{e^4 + 3e + 2}{3e^2}$ g) nu știu.

(10pt) **6.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 4}$. Să se determine acea primitivă $F(x)$ a lui $f(x)$ pentru care $F(2) = 3 + \frac{3\pi}{8}$.

- $2x - \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} + \pi - 1$ b) $2x - \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} + \pi + 1$ c) $2x + \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} + \pi + 1$ d) $x - \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} - \pi - 1$
 e) $2x - \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} + \pi$ f) $x - \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} - 1$ g) nu știu.

(10pt) **7.** Se consideră $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8. Să se calculeze în \mathbb{Z}_8 elementul $a = \widehat{2} \cdot \widehat{7} + \widehat{3} \cdot \widehat{4} + \widehat{5}$.

- a) $a = \widehat{0}$ b) $a = \widehat{2}$ c) $a = \widehat{6}$ $a = \widehat{7}$ e) $a = \widehat{1}$ f) $a = \widehat{5}$ g) nu știu.

(10pt) **8.** Fie mulțimea $M = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$. Să se determine simetricul

elementului $A(2, 1) \in M$ în raport cu înmulțirea matricelor.

- a) $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ b) $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ c) $A(3, 1)$ d) $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e) $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ f) $A\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ g) nu știu.

(10pt) **9.** Pe mulțimea $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Să se rezolve ecuația $(x, 2018) * (1, x) = (2017, 2019)$.

- a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 3$ d) $x \in \{-3, 2\}$ e) $x = -1$ f) $x = 0$ g) nu știu.

(10pt) **10.** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \perp y = xy + 4x + 4y + 12$. Calculați

$$(-2018) \perp (-2017) \perp \dots \perp 2017 \perp 2018.$$

- a) 2018! b) -4 c) 2017 d) 2018 e) 2 f) 1 g) nu știu.

(10pt) **11.** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x - 3)(y - 1) + 3$. Să se determine, dacă există, elementul neutru al acestei legi.

- a) 2 b) nu există c) -2 d) 4 e) 3 f) 1 g) nu știu.

(10pt) **12.** Pe mulțimea numerelor reale se definește operația algebrică $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dacă (x^*, y^*) , $x^*, y^* > 0$, este soluția sistemului $\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ x \circ 2 + y \circ 3 = 2\sqrt{13} \end{cases}$, atunci $x^* + y^*$ este

- a) 1 b) 5 c) $\sqrt{17}$ d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$ g) nu știu.