Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2018, etapa finală
Clasa a X-a, Secţiunea Ştiinţele Naturii, Tehnologic, Economic

(10p) **1.** Fie b_n, $n \in \mathbb{N}$, termenul general al unei progresii geometrice cu $b_0 > 0$ şi raţia $q = 2$. Să se calculeze $a_{2018} - a_0$, unde $a_n = \log_4 b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) $\log_4 2018$ b) 2018 c) $\frac{2017}{2}$ d) $\log_4 2017$ e) $2018 \log_4 b_0$ f) 1009

(10p) **2.** Câte numere întregi x verifică inegalitatea $\log_x(x^2 - 2) \leq 1$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) $o\ infinitate$

(10p) **3.** Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} + \sqrt[4]{x+79} = 6$ este inclusă în intervalul:

a) $[0, 1)$ b) $[1, 8)$ c) $[8, 27)$ d) $[27, 81)$ e) $[81, 256)$ f) $[256, 625]$.

(10p) **4.** Să se determine toate valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $9^x + 2(2a+1)3^x + 4a^2 - 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$ b) $(-1, \infty)$ c) $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$
d) $(-\infty, -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$ e) $(-\infty, -1) \cup \{2\}$ f) $(-\infty, -1)$

(10p) **5.** Suma valorilor lui $x \in [0, 2\pi]$ pentru care $\sin x + \sin 2x = 0$ este:

a) π b) $\dfrac{5\pi}{3}$ c) 2π d) 3π e) $\dfrac{11\pi}{3}$ f) 5π

(10p) **6.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel ca $z = (3 - z) \cdot |3 - z|$. Să se determine valoarea expresiei $E(z) = 2z - 7$.

a) 13 b) $\sqrt{13}$ c) $-\sqrt{13}$ d) $\sqrt{13}i$ e) $13i$ f) -13

(10p) **7.** Să se precizeze numărul soluţiilor sistemului $\begin{cases} \log_2^2 x + \log_4^2 y = 2 \\ 2^{\log_2^2 x} + 2^{\log_4^2 y} = 4 \end{cases}$.

(10p) **8.** Din punctele $A(1, 0)$ şi $B(4, 4)$ pornesc simultan doi roboţi, cu vitezele constante v_1, respectiv v_2. Să se calculeze $\dfrac{v_1}{v_2}$ ştiind că cei doi roboţi se deplasează rectiliniu şi se întâlnesc în punctul $I(7, 8)$.

(10p) **9.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sum_{k=0}^{11} (1+i)^k$, unde $i = \sqrt{-1}$.

10. Fie $a, b, c \in [-2018, 2018]$, $a \neq 0$, şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax|x| + bx + c$.
(3p) a) Pentru $a = 4, b = -17, c = -4$, să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $f(-2^n) = 0$.
(7p) b) Pentru $a = c = 1$, să se afle cea mai mică valoare a lui b pentru care f este o funcţie bijectivă.

11. Pentru orice număr natural n se consideră punctul P_n de abscisă $n \cdot \cos \dfrac{n\pi}{3}$ şi de ordonată $n \cdot \sin \dfrac{n\pi}{3}$.
(6p) a) Se unesc două câte două punctele $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_6$. Câte drepte se obţin?
(4p) b) Fie S suma lungimilor segmentelor $[P_0P_1]$,$[P_0P_2]$,...,$[P_0P_{2018}]$. Să se determine restul împărţirii lui S la 2018.

12. Se notează cu $[t]$ partea întreagă a numărului real t.
(3p) a) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $[a] + [a + \frac{1}{2}] = [na]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
(7p) b) Fie x cel mai mic număr real cu proprietatea $[\log_2 \sqrt{x}] + [\log_2 \sqrt{2x}] = \log_2 \sqrt{4x}$. Să se calculeze $[x]$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.