Concursul Naţional de Matematică "Valeriu Alaci" - 2018, etapa finală
Clasa a XI-a, Secţiunea Ştiinţele Naturii, Tehnologic, Economic

(10pt) **1.** Folosind, eventual, limita $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y - y}{y^3} = -\frac{1}{6}$, să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{2016}\right)-\sin^{2016}(x)}{x^{2018}}.$$

a) 336 b) 2016 c) 1008 d) $\frac{2015}{6}$ e) $\frac{1009}{3}$ f) 672

(10pt) **2.** Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

(10pt) **3.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=4$. Dacă determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}=8$, atunci valoarea sumei $a+b+c$ este:

a) -4 b) 2 c) 0 d) 4 e) 12 f) -2

(10pt) **4.** Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\prod\limits_{k=1}^{2018}(1+\arcsin(kx))}{\sin x+2\,\sin(2\,x)+\cdots+2018\,\sin(2018\,x)}.$$

a) 0 b) $\frac{1}{2018}$ c) $\frac{1}{2019}$ d) $\frac{3}{4037}$ e) $+\infty$ f) $\frac{1}{1009}$

(10pt) **5.** Să se determine produsul soluţiilor ecuaţiei $E(x)=\frac{1}{8}$ din intervalul $[0,\pi]$, unde

$$E(x)=\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin(2x)\\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin(2x)\\ 1+\sin(2x) & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi^2}{9}$ d) 0 e) $\frac{5\pi^2}{36}$ f) $\frac{\pi}{6}$

(10p) **6.** Fie $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & \omega\\ \omega^2 & 1\end{pmatrix}$. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât

$$A+A^2+\cdots+A^n=15A.$$

a) 1 b) 15 c) 3 d) 4 e) 8 f) 2

(10p) **7.** Să se determine câte matrice $X \in M_2(\mathbb{Z})$ verifică ecuaţia $X^t \cdot X = 2018\, I_2$, unde X^t este transpusa matricei X, iar $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(10p) **8.** Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + a \cdot A$, $a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze determinantul matricei $X(1) \cdot X(2) \cdots X(2018)$.

(10p) **9.** Dacă f^{-1} este inversa funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$, să se calculeze $\lim\limits_{y \to -\infty} e^{-y} f^{-1}(y)$.

(10p) **10.** Să se studieze existenţa asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 + x \ln(e^x + 1)}$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine ecuaţia sa.

(10p) **11.** Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Dacă tripletul (x, y, z) este soluţia sistemului

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + \quad z = 1 \end{cases},$$

să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a pentru care x, y, z se află, în această ordine, în:

a) (5 pt) progresie aritmetică;

b) (5 pt) progresie geometrică.

(10p) **12.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietăţile:

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = 5xy,\ \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R},\ \text{respectiv } \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

a) (4 pt) Să se determine $f'(0)$;

b) (6 pt) Să se determine $f'(1)$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele şase subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.
La ultimele şase subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final/rezultatele finale. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.