

Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2018, etapa finală
Clasa a XII-a, Secțiunea SN, Tehnologic, Economic

Varianta A

(10pt) **1.** Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție "*" definită prin $x * y = \log_2(2^x + 2^y + 1)$.
Calculați $2^{1*2} + 4^{3*4}$.

a) 632; b) 1; c) 512; d) 1024; e) 542; f) 625.

(10pt) **2.** Precizați care dintre următoarele mulțimi este parte stabilă pentru legea de compoziție $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ definită pe $(0, \infty)$.

a) $(0, 1)$; b) $[2, \infty)$; c) $\{1\}$; d) $[1, \infty)$; e) $[1, 2]$; f) $(0, 2]$.

(10pt) **3.** Se consideră grupul $U(\mathbb{Z}_n) = \{\widehat{k} \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$. Să se determine inversul elementului $\widehat{17}$ din $U(\mathbb{Z}_{18})$.

a) $\widehat{5}$; b) $\widehat{15}$; c) $\widehat{11}$; d) $\widehat{13}$; e) $\widehat{17}$; f) $\widehat{7}$.

(10pt) **4.** Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^3 (x + |m - x|) dx = 9.$$

a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\{-1, 3\}$

(10pt) **5.** Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2 + n^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) 1; b) 0; c) ∞ ; d) 2; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{2}$.

(10pt) **6.** Să se precizeze care din următoarele intervale conține numărul $N = \frac{1}{41} \int_{-26}^{15} \sqrt[3]{4096 - x^2} dx$.

a) $\left[\frac{42}{41}, \frac{206}{41}\right]$ b) $(15, 16]$ c) $(13, 14)$ d) $\left[-\frac{26}{41}, \frac{15}{41}\right]$ e) $[6, 13]$ f) $[14, 15]$.

(10pt) 7. Fie F o primitivă a funcției $f(x) = \frac{\cos x}{3 + \sin^2 x}$; calculați $F\left(\frac{2017\pi}{2}\right) + F\left(-\frac{2019\pi}{2}\right)$.

(10pt) 8. Să se rezolve ecuația $\widehat{7}x + \widehat{17} = \widehat{2}(\widehat{9}x + \widehat{1})$ în inelul \mathbb{Z}_{20} .

(10pt) 9. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \quad \text{respectiv} \quad g(x) = \int_0^x f(t)f(x-t)dt.$$

(7pt) a) Să se găsească expresia analitică a funcției g pentru pe intervalul $[0, a]$.

(3pt) b) Să se calculeze aria suprafeței delimitate de graficul funcției g și axa Ox .

(10pt) 10. Pe mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} se definește legea de compoziție

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i,$$

$x, y \in \mathbb{C}$. Să se determine elementul neutru e al acestei legi.

(10pt) 11. Să se determine $m \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x} dx = \frac{1}{m}$.

(10pt) 12. Pe mulțimea $(0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{xy}{x + y}$, $x, y \in (0, \infty)$.

(3pt) a) Să se calculeze $5 \circ 5 \circ 5 \circ 5$.

(7pt) b) Să se calculeze $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{20}$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă 0 puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.