

**Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa finală**  
**Clasa a IX-a, Secțiunea Matematică - Informatică**

(10p) **1.** În triunghiul  $ABC$  știm că  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$ . Atunci înălțimea  $\overrightarrow{AD}$ ,  $D \in BC$ , este:

- a)  $\frac{19}{5}\vec{i} - \frac{22}{5}\vec{j}$     b)  $\frac{7}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$     c)  $\frac{10}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$     d)  $\frac{16}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}$     e)  $\frac{11}{3}\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}$     f) alt răspuns

(10p) **2.** Dintre propozițiile de mai jos exact una este adevărată. Care?

$p_1$ : „ $p_2$  e adevărată.”

$p_2$ : „ $p_5$  e falsă.”

$p_3$ : „toate propozițiile de la  $p_1$  până la  $p_5$  sunt adevărate.”

$p_4$ : „toate propozițiile de la  $p_1$  până la  $p_5$  sunt false.”

$p_5$ : „ $p_1$  e falsă.”

- a)  $p_1$                       b)  $p_2$                       c)  $p_3$                       d)  $p_4$                       e)  $p_5$                       f) alt răspuns

(10p) **3.** Dacă  $x = \frac{a}{b}$ , cu  $a, b \in \mathbb{N}^*$  și  $(a, b) = 1$  este unica soluție a ecuației

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{x} + \frac{5}{12},$$

atunci  $a + b$  are valoarea:

- a) 21                      b) 41                      c) 34                      d) 43                      e) 30                      f) alt răspuns

(10p) **4.** Aflați valoarea lui  $(1 - \operatorname{ctg} 22^\circ)(1 - \operatorname{ctg} 23^\circ)$ .

- a) 2                      b) 1                      c) 3                      d) -1                      e) 0                      f) alt răspuns

(10p) **5.** Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$  și punctele  $D, E, M$  respectiv picioarele înălțimii, bisectoarei și mediane din  $A$ . Dacă  $AB = c, BC = a$  și  $AC = b$ , atunci aflați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care:

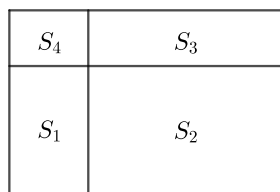
$$\overrightarrow{AE} = x \cdot \overrightarrow{AD} + (1 - x) \cdot \overrightarrow{AM}.$$

- a)  $x = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2$     b)  $x = \frac{a^2}{b^2+c^2}$     c)  $x = \frac{a^2}{b^2+bc+c^2}$     d)  $x = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$     e)  $x = \frac{a^2}{b+c}$     f) alt răspuns

(10p) **6.** Fie  $n$  un număr natural nenul. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = x - (n + 2) \cdot [x] + [nx]$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Determinați  $(f \circ f)(x)$ .

- a) 0                      b) 1                      c)  $x - 1$                       d)  $x$                       e)  $x + 1$                       f) alt răspuns

(10p) **7.** O tablă dreptunghiulară este tăiată, prin drepte paralele la laturi, în patru bucăți dreptunghiulare având ariile  $S_1, S_2, S_3$ , respectiv  $S_4$ . (Bucata de arie  $S_1$  are câte o latură comună cu bucățile de arii  $S_2$  și  $S_4$  și doar un punct comun cu bucata de arie  $S_3$ , ca în figura de mai jos.) Cunoscând că  $S_2 = 300 \text{ cm}^2$ ,  $S_3 = 180 \text{ cm}^2$  și  $S_4 = 120 \text{ cm}^2$ , determinați suprafața inițială a tablei.



(10p) 8. Fie funcția  $f : \mathbb{Q} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 3}$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{3}{2}$ . Determinați numărul punctelor situate pe graficul funcției  $f$  care au ordonata un număr întreg.

(10p) 9. Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  definim  $x_n = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \cos \frac{n(n-1)\pi}{2}$ . Calculați  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}$ .

(10p) 10. Știind că cele 21 de pătrățele goale ale pătratului  $5 \times 5$  de mai jos pot fi completate cu numere naturale astfel încât numerele de pe fiecare linie și fiecare coloană să fie în progresie aritmetică, aflați ce număr trebuie scris în locul marcat cu \*.

			*	
	74			
				186
		103		
0				

(10p) 11. În câte moduri pot fi alese 4 dintre muchiile unui cub  $ABCD A' B' C' D'$  astfel încât nicioare două dintre ele să nu aibă niciun vârf comun?

12. Mulțimea  $M = \{a, b, c\}$  se numește *aritmetică* dacă unul dintre elementele ei este media aritmetică a celorlalte două. De exemplu, mulțimea  $\{2, 8, 5\}$  este aritmetică pentru că  $5 = \frac{8+2}{2}$ .

(6p) a) Aflați numărul de submulțimi *aritmice* ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, 2019\}$ .

(4p) b) Aflați numărul de submulțimi *aritmice* ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, 2019\}$  care conțin numărul 1000.

**Notă.** Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.