

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa finală
Clasa a IX-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnologic, Economic

(10p) **1.** Numerele x, y sunt ambele mai mari decât 1. Care dintre următoarele fracții are valoarea cea mai mare?

- a) $\frac{x}{y+1}$ b) $\frac{x}{y-1}$ c) $\frac{2x}{2y+1}$ d) $\frac{2x}{2y-1}$ e) $\frac{3x}{3y+1}$ f) $\frac{3x}{3y-1}$

(10p) **2.** Dintre propozițiile de mai jos exact una este adevărată. Care?

p_1 : „ p_2 e adevărată.”

p_2 : „ p_5 e falsă.”

p_3 : „toate propozițiile de la p_1 până la p_5 sunt adevărate.”

p_4 : „toate propozițiile de la p_1 până la p_5 sunt false.”

p_5 : „ p_1 e falsă.”

- a) p_1 b) p_2 c) p_3 d) p_4 e) p_5 f) alt răspuns

(10p) **3.** Câte dintre funcțiile de mai jos satisfac relația

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} ?$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \frac{2}{x}, \quad f(x) = -x, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f(x) = x^2$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) alt răspuns

(10p) **4.** În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, N este mijlocul segmentului $[OM]$, iar $\overrightarrow{NA} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci $a + b$ este:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 7 f) alt răspuns

(10p) **5.** Dacă în intervalul $I_n = \left[\sqrt{n^2 + n + 1}, \sqrt{n^4 + n^2 + 1} \right]$, $n \geq 2$, se află 12 numere naturale, atunci câte numere naturale se află în intervalul I_{n^2} ?

- a) 1 b) 36 c) 72 d) 144 e) 240 f) alt răspuns

(10p) **6.** Pitagora știa cât face $\sin^2 x + \cos^2 x$, dar cine știe cât face

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6} ?$$

- a) $\frac{1}{12}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) -1 e) $\frac{1}{6}$ f) alt răspuns

(10p) **7.** Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care 4 este soluție a ecuației

$$\sqrt{(x-m)^2} + \sqrt{(3-x)^2} = 2.$$

(10p) **8.** Mulțimea numerelor reale care verifică inegalitatea $\sqrt{x^2 + x} \leq x + 1$ este ...

(10p) **9.** O tablă dreptunghiulară este tăiată, prin drepte paralele la laturi, în patru bucăți dreptunghiulare având ariile S_1 , S_2 , S_3 , respectiv S_4 . (Bucata de arie S_1 are câte o latură comună cu bucățile de arii S_2 și S_4 și doar un punct comun cu bucata de arie S_3 , ca în figura de mai jos.) Cunoscând că $S_2 = 300 \text{ cm}^2$, $S_3 = 180 \text{ cm}^2$ și $S_4 = 120 \text{ cm}^2$, determinați suprafața inițială a tablei.

S_4	S_3
S_1	S_2

(10p) **10.** Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este definit recurent prin: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{7}$ și

$$a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}$$

pentru orice $n \geq 3$. Aflați a_{2019} .

(10p) **11.** Funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietățile: $f(0) = 2019$ și $f(n + 505) = \frac{1+f(n)}{1-f(n)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Aflați $f(1010)$.

12. Mulțimea $M = \{a, b, c\}$ se numește *aritmetică* dacă unul dintre elementele ei este media aritmetică a celorlalte două. De exemplu, mulțimea $\{2, 8, 5\}$ este aritmetică pentru că $5 = \frac{8+2}{2}$.

(6p) a) Aflați numărul de submulțimi *aritmice* ale mulțimii $\{1, 2, \dots, 2019\}$.

(4p) b) Aflați numărul de submulțimi *aritmice* ale mulțimii $\{1, 2, \dots, 2019\}$ care conțin numărul 1000.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.