Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2019, etapa finală
Clasa a XII-a, Secţiunea SN, Tehnologic, Economic

(10pt) **1.** Fie grupul abelian $(\mathbb{Z}_{120}, +)$. Să se determine suma ordinelor elementelor $\widehat{25}$, $\widehat{30}$, $\widehat{55}$, $\widehat{75}$ şi $\widehat{80}$.

a) 80; b) 0; c) 119; d) 60; e) 265; f) 63.

(10pt) **2.** Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx, \quad a,b>0\ .$$

a) $\frac{1}{a}\ln\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{a^2+b^2}$; b) $\frac{1}{2a}\ln\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{a+b}{a^2+b^2}$;
c) $\frac{1}{a}\ln\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{a+b}{2a^2+b^2}$; d) $\frac{1}{2a}\ln\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{2a^2+b^2}$;
e) $\frac{1}{a}\ln\frac{4a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{a^2+b^2}$; f) $\frac{1}{2a}\ln\frac{4a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{2a^2+b^2}$.

(10pt) **3.** Se consideră ecuaţia $x^3+3x^2+ax+b=0$, cu rădăcinile x_1, x_2 şi x_3, care sunt în progresie aritmetică. Fie $M=\{(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\mid x_1+1, x_2+1, x_3+1 \text{ sunt în progresie geometrică}\}$. Atunci $a+b$ are valoarea

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6; f) 8.

(10pt) **4.** Calculaţi numărul $r=\dfrac{22}{7}-\displaystyle\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$.

a) $r=\pi$; b) $r=2\text{ arctg }11$; c) $r=\dfrac{7}{2}$; d) $r=3$; e) $r=2\text{ arctg }7$. f) $r=2\text{ arctg }77$.

(10pt) **5.** Fie $(G,\cdot)$ un grup finit şi $a,b\in G$ astfel încât $ab=ba$. Dacă $ord(a)=2$ şi $ord(b)=3$ atunci cât este ordinul lui ab.

a) 2; b) 3; c) 8; d) 9; e) 6; f) 5.

(10pt) **6.** Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\ln(1+2\sin(x))dx\ .$$

a) $3\ln 3$; b) $\dfrac{4\ln 3}{3}$; c) $\dfrac{3\ln 3}{4}$ d) $\arcsin 4$; e) $\dfrac{3}{4}$; f) $\arcsin 3$.

(10pt) **7.** Fie $f:[0,1]\to[\frac{\pi}{4},\ \text{arctg } 2]$, $f(x)=\ \text{arctg } (x+1)$. Ştiind că

$$\int_{\pi/4}^{\text{arctg } 2} f^{-1}(y)dy = a\ln\frac{5}{2} + b\ \text{arctg } 2 + c\pi$$

calculaţi $a+b+4c$.

(10pt) **8.** Fie G un grup multiplicativ de ordinul p, (p număr prim). Să se determine izomorfismul $f:(\mathbb{Z}_p,+)\to(G,\cdot)$, astfel încât $f(\widehat{1})=a$, $a\in G$, a diferit de elementul neutru.

(**a+b**) **9.** Pe mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, definim legea de compoziţie

$$(f\star g)(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)\ .$$

(4pt) **a)** Să se determine $h(n)=(f\star g)(n)$ pentru $f(n)=2^n/n!$ şi $g(n)=(-1)^n/n!$.

(6pt) **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie "$\star$".

(10pt) **10.** Ştiind că

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^8+x^6}dx = 41a\sqrt{3}+b+6c\pi\ ,$$

calculaţi $270a-15b+6c$.

(10pt) **11.** Calculaţi aria limitată de dreptele de ecuaţii $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ şi curbele de ecuaţii $y=\sin x$ şi $y=\cos x$.

(**a+b**) **12.** Fie polinomul

$$f=(X^2-11X+1)(X^2-11X+2)\cdots(X^2-11X+100)\ .$$

(7pt) **a)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale polinomului f .
(3pt) **b)** Să se calculeze suma rădăcinilor reale ale polinomului f.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă 0 puncte. Bifarea răspunsului "Nu ştiu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.