Concursul Naţional de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa finală
Clasa a XI-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Se consideră funcţia continuă $f:[1,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+\{x\})\,(b-\{x\})$, $a,b\in\mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x. Dacă $Im(f)=[m,M]$, să se determine $M-m$.

a) 0 b) 1 c) $\frac{b-a}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{a-b}{2}$ f) $\frac{a-b}{4}$

(10pt) **2.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}x&y\\z&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $AB\neq O_2$ şi $BA=O_2$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B.

a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\{2k:\,k\in\mathbb{Z}\}$ d) $\mathbb{Z}\setminus\{1\}$ e) $\mathbb{Z}\setminus\{2\}$ f) $\{2k:\,k\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}\}$

(10pt) **3.** Fie funcţia inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x-1$. Să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(e)$.

a) $\frac{1}{e+1}$ b) $\frac{1}{e^e+1}$ c) e^e+e-1 d) e^e+1 e) $\frac{1}{2}$ f) 0

(10pt) **4.** Să se calculeze

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^{2020}(x)-\sin^{2020}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2020}$ c) $505\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}$ d) $\frac{505}{2^{1008}}$ e) $\frac{505}{2^{1010}}$ f) $2020\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}$

(10pt) **5.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine suma $a+b+c$ astfel încât valoarea determinantului

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-a-b&c&c\\a&1-b-c&a\\b&b&1-c-a\end{vmatrix}$$

să fie minimă.

a) 0 b) 1 c) -1 d) $-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{2}$

(10p) **6.** Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\operatorname{tg}x$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) $-\infty$ e) nu există f) e

(10p) **7.** Ştiind că $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n,b_n\in\mathbb{Q}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

(10p) **8.** Să se determine suma tuturor valorilor lui k, $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$, pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin recurenţa

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n),\ \forall\, n\in\mathbb{N},\quad x_0=\sin^2\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

este convergent.

(10p) **9.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ şi şirul de matrice $(X_n)_{n\geq 0}$, definit prin

$$X_0=I_3 \text{ şi } X_{n+1}=AX_n+A-I_3,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Calculaţi
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{det(X_n)}{2^{2n+2}}\right)^{2^n}.$$

(10p) **10.** Să se determine suma modulelor tuturor valorilor pe care le poate lua numărul $x \in \mathbb{R}$ pentru care există matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietăţile $A^2 - xAB + B^2 = O_2$ şi $det(AB - BA) \neq 0$.

(10p) **11.** Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0 = 1$ şi $x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2 - 7}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) (3 pt) Să se studieze dacă există $p, q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_{n+2} = p\, x_{n+1} + q\, x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, şi, în cazul în care acestea există, să se determine aceste valori.

b) (7 pt) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{5^n}$.

(10p) **12.** Se consideră matricele
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^{2019}.$$

Să se determine:

a) (6 pt) $tr\left(A^{2019}\right)$, unde $tr(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X;

b) (4 pt) Suma elementelor matricei B.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele şase subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu ştiu" se cuantifică cu 2 puncte.
La ultimele şase subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final/rezultatele finale. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.