

Concursul Național de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa finală
Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnologic, Economic

(10pt) **1.** Se consideră funcția continuă $f : [1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a + \{x\})(b - \{x\})$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x . Dacă $Im(f) = [m, M]$, să se determine $M - m$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{b-a}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{a-b}{2}$ f) $\frac{a-b}{4}$

(10pt) **2.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $AB \neq O_2$ și $BA = O_2$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B .

- a) \mathbb{N} b) \mathbb{Z} c) $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ f) $\{2k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$

(10pt) **3.** Fie funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x - 1$. Să se calculeze $(f^{-1})'(e)$.

- a) $\frac{1}{e+1}$ b) $\frac{1}{e^e+1}$ c) $e^e + e - 1$ d) $e^e + 1$ e) $\frac{1}{2}$ f) 0

(10pt) **4.** Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2020}(x) - \sin^{2020}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2020}$ c) $505 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}$ d) $\frac{505}{2^{1008}}$ e) $\frac{505}{2^{1010}}$ f) $2020 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}$

(10pt) **5.** Fie $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 2019\}$. Câte triplete (a, b, c) există astfel ca sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = a + c \\ cx + ay + bz = a + b \end{cases}$$

să fie compatibil?

- a) 0 b) 2019^3 c) $1010 \cdot 2019$ d) 2019 e) $3 \cdot 2019$ f) $2 \cdot 2019$

(10p) **6.** Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x^{2019} + 2019x]}{[x]^{2019} + 2019[x]},$$

unde $[x]$ este partea întregă a lui x , și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) $\frac{1}{2019}$ e) nu există f) 2019

(10p) **7.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2019|\ln x|}$. Să se calculeze $\frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)}$.

(10p) **8.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine suma $a + b + c$ astfel încât valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - a - b & c & c \\ a & 1 - b - c & a \\ b & b & 1 - c - a \end{vmatrix}$$

să fie minimă.

(10p) **9.** Se consideră funcțiile $f, g : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ x + 1, & \text{dacă } x \in [1, e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x+1))}{\ln(f(x)+1)}.$$

Dacă notăm cu

$$A = \{x \in (0, e) : g \text{ este discontinuă în } x\} \text{ și } S = \sum_{a \in A} a,$$

să se determine S .

(10p) **10.** Să se determine suma modulelor tuturor valorilor pe care le poate lua numărul $x \in \mathbb{R}$ pentru care există matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietățile $A^2 - xAB + B^2 = O_2$ și $\det(AB - BA) \neq 0$.

(10p) **11.** Se consideră funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{3x}{1+|x|}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f .

a) (4 pt) Să se determine D .

b) (6 pt) Să se determine mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui f .

(10p) **12.** Se consideră matricele

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2019}.$$

Să se determine:

a) (6 pt) $\text{tr}(A^{2019})$, unde $\text{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X ;

b) (4 pt) Suma elementelor matricei B .

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele șase subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele șase subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final/rezultatele finale. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.