Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa finală

Clasa a X-a, Secţiunea Ştiinţele Naturii, Tehnologic, Economic

(10pt) **1.** Fie $a, b > 0$ astfel încât punctul $P(\log_2 a, \log_2 b)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = -x + 2$. Atunci $a \cdot b$ este egal cu:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32.

(10pt) **2.** Stabiliţi pentru câte valori ale lui $x \in \mathbb{N}$ este corect definită expresia $f(x) = \log_{10-x} \dfrac{\sqrt{38 - \sqrt{x}} - x}{1 - x}$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

(10pt) **3.** Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ şi $t > 1$. Calculaţi $f(t^2 + \sqrt{t^4 - 1})$, ştiind că $f(t + \sqrt{t^2 - 1}) = 8$.

a) 2 b) 8 c) 18 d) 32 e) 50 f) 72

(10pt) **4.** Precizaţi câte numere $a \in [0, 2\pi]$ au proprietatea $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin(\pi + a)$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

(10pt) **5.** Determinaţi $|z^2|$, dacă $|z - 1| = |z + 5| = |z - i|$, unde $i = \sqrt{-1}$.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 8 e) 9 f) 16

(10p) **6.** Punctul $P(a, b)$ aparţine cercului trigonometric, adică există $t \in [0, 2\pi)$ astfel ca $a = \cos t$ şi $b = \sin t$. Dacă $a^2 - b^2 = \dfrac{1}{2}$, calculaţi suma tuturor valorilor lui t cu această proprietate.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{5\pi}{6}$ d) π e) $\dfrac{8\pi}{3}$ f) 4π

(10p) **7.** Aflaţi cea mai mare soluţie reală a ecuaţiei $\sqrt[3]{2^x - 1} + 1 = 2^x$.

(10p) **8.** Fie funcţiile $f, g : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - \log_x 4$ şi $g(x) = \log_{x^2} 64$. Dacă $A(p, q)$ este punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g, calculaţi $p + q$.

(10p) **9.** Numerele $a, b, c > 0$ verifică relaţiile $\log_2 a = \log_5 b = \log_6 c$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = 65$. Calculaţi $a + b + c$.

10. Pătratele unei table de şah au latura de $1cm$ şi sunt delimitate de 9 segmente orizontale numite *linii* şi 9 segmente verticale numite *coloane*. Intersecţia liniei j cu coloana i formează *nodul* $N_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, 9\}$.
(5p) a) Care este distanţa în centimetri dintre nodurile $N_{4,2}$ şi $N_{7,6}$?
(5p) b) Determinaţi modulul diferenţei dintre numărul de noduri situate de o parte şi cealaltă a dreptei ce uneşte nodurile $N_{5,2}$ şi $N_{3,4}$.

11. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_1(z_2 + z_3) = z_2(z_3 + z_1) = z_3(z_1 + z_2) = -14 + 48i$, unde $i = \sqrt{-1}$.
(4p) a) Calculaţi $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$.
(6p) b) Dacă cele trei numere au partea reală pozitivă, determinaţi $Re(z_1 + z_2 + z_3)$.

12. Fie familia de drepte $d_m : (m + 6)x + (m + 1)y - 2m - 12 = 0, m \in \mathbb{Z}$.
(7p) a) Dacă $P(a, b)$ este punctul fix al familiei de drepte, calculaţi $a + b$.
(3p) b) Stabiliţi câte drepte din familie au panta număr întreg.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu ştiu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.