

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa online
Clasa a XII-a, Secțiunea Matematică-Informatică

(10p) **1.** Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{e^x \sqrt{1 + e^{2x}}} dx.$$

a) 2; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) e ; f) Nu știu.

(10p) **2.** Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}$. Să se determine coeficientul lui $f(x)^{13}$ din expresia $\int f(x) dx$.

a) $\frac{12}{13}$; b) $\frac{1}{13}$; c) $\frac{3}{13}$; d) $\frac{11}{13}$; e) $\frac{4}{13}$; f) Nu știu .

(10p) **3.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t \sin 2t dt$, și $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$. Să se calculeze $f(x) + g(x)$ pentru toate valorile lui x din intervalul $[0, \pi/2]$.

a) $x \arcsin x$; b) $x \arccos \sqrt{x}$; c) $x \arcsin \sqrt{x}$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{2}$; f) Nu știu.

(10p) **4.** Să se calculeze valoarea integralei $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} dx$. Coeficientul lui π în expresia obținută este

a) $\frac{\sqrt{3}}{12}$; b) $\frac{\sqrt{3}+1}{24}$; c) $\frac{\sqrt{3}-1}{12}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{24}$; e) $\frac{\sqrt{3}-1}{24}$; f) Nu știu.

(10p) **5.** Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$. Să se determine primitiva F a funcției f cu proprietatea că $F(e^{\sqrt{e}-1}) = 2$.

a) $F(x) = \ln(1 + \ln x)$; b) $F(x) = \ln(1 + \ln x) - \frac{1}{2}$; c) $F(x) = \ln(1 + \ln x) + \frac{3}{2}$; d) $F(x) = \ln(1 + \ln x) + 2$;
 e) $F(x) = \ln(1 + \ln x) - \frac{3}{2}$ f) Nu știu .

(10p) **6.** Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Stabiliți care din următoarele relații este adevărată

a) $\frac{I_{15}}{I_{14}} = \frac{29}{30}$; b) $\frac{I_{15}}{I_{14}} = \frac{15}{14}$; c) $\frac{I_{15}}{I_{14}} = \frac{14}{15}$; d) $I_{15} \cdot I_{14} = \frac{15}{14}$; e) $\frac{I_{15}}{I_{14}} = \frac{30}{29}$; f) Nu știu .

(10p) **7.** Pe mulțimea $M = [2, \infty)$ se consideră legea de compoziție definită prin $x \star y = xy - 2x - 2y + 5 + e^m - me^m$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care M este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea \star .

a) $m = 0$; b) $m = 1$; c) $m \geq 2$; d) $m < 0$; e) nu există m ; f) nu știu.

(10p) **8.** Pe mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 3x - 3y + 6$. Să se determine $x \in M$ pentru care $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{2019 \text{ ori}} = \frac{3}{2} - 2^{2018}$.

a) $x = 1$; b) $x = 6$; c) $x = \frac{2}{3}$; d) $x = \frac{5}{2}$; e) $x = \frac{1}{2}$; f) nu știu.

(10p) **9.** Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$, $x \star y = x^{2 \ln y}$, $\forall x, y \in G$. Notăm cu e_* elementul neutru al legii \star . Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$(e_* \star e_*) \cdot (e_*^2 \star e_*) \cdot (e_*^3 \star e_*) \cdot \dots \cdot (e_*^n \star e_*) = (\sqrt{e})^{153}.$$

a) $n = 10$; b) $n = 11$; c) $n = 17$; d) $n = 21$; e) nu există $n \in \mathbb{N}$; f) nu știu .

(10p) **10.** Fie (G, \cdot) un grup unde $G = \{z \in \mathbb{C} | z^3 = 1\}$. Să se calculeze $a = \varepsilon^{-15} + \varepsilon^{-23} + \varepsilon^{-46}$, $\varepsilon \in G$.

a) $a = 1$; b) $a = -1$; c) $a = i$; d) $a = 1 + i$; e) $a = 0$; f) nu știu .

(10p) **11.** În inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ să se calculeze $a = \widehat{1}^{2019} + \widehat{2}^{2019} + \widehat{3}^{2019} + \widehat{4}^{2019} + \widehat{5}^{2019}$.

- a) $\widehat{0}$; b) $\widehat{1}$; c) $\widehat{2}$; d) $\widehat{3}$; e) $\widehat{4}$; f) nu știu .

(10p) **12.** Se consideră mulțimea

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & a & \widehat{0} \\ b & c & a \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

Atunci numărul elementelor lui A este

- a) 6; b) 3; c) 4; d) 8; e) 16; f) nu știu.

Răspunsuri:

1. c; 2. a; 3. d; 4. b; 5. c; 6. a; 7. a; 8. e; 9. c; 10.e ; 11. d; 12. d.