

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa online
Clasa a XII-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnologic, Economic

(10p) **1.** Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 \frac{x - x^3}{x^4 + 1} dx$$

- a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{8}$; b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$; c) $\pi - 2 \ln 2$; d) 2π ; e) $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2}$; f) Nu știu.

(10p) **2.** Pe \mathbb{R} se definește operația algebrică

$$x * y = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Simetricul elementului 2019 este egal cu:

- a) -2019 ; b) $\sqrt{2019}$; c) 2019 ; d) $-\sqrt{2019}$; e) $\frac{1}{2019}$; f) Nu știu.

(10p) **3.** Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea $x^2 = e, \forall x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului. Stabiliți care din următoarele afirmații este adevărată:

- a) G este grup comutativ; b) G este grup necomutativ; c) nu există grupuri cu proprietatea din enunț;
d) există grupuri comutative cu proprietatea din enunț și există grupuri necomutative cu proprietatea din enunț;
e) doar grupul format dintr-un singur element verifică proprietatea din enunț; f) Nu știu.

(10p) **4.** Fie $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă astfel încât $\forall x \in [-3, 3]$ avem $f(x) + f(-x) = x^2$, atunci

$$\int_{-3}^3 f(x) dx$$

este egală cu:

- a) 1; b) 2; c) 0; d) 6; e) 9; f) Nu știu.

(10p) **5.** Pe \mathbb{Z} se definește legea de compoziție

$$x \circ y = xy - 2018x - 2018y + 2018 \cdot 2019, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Diferența dintre cea mai mare și cea mai mică soluție a ecuației

$$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2018 \text{ ori}} = 2^{2018} + 2018$$

este egală cu:

- a) 6; b) 5; c) 4; d) 2020; e) 2018; f) Nu știu.

(10p) **6.** Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Știind că orice primitivă F a funcției f verifică relația

$$x + F(x) = (x + 1)f(x), \forall x \in [0, \infty),$$

valoarea $f(3) - f(1) =$

- a) $\ln 2$; b) 1; c) 0; d) $\ln 3$; e) e^3 ; f) Nu știu.

(10p) **7.** Se consideră grupul (G, \circ) , unde $G = (0, \infty)$, iar legea "o" este definită pe $G \times G$ prin :

$$x \circ y = 2^{\sqrt[3]{\log_2^3 x + \log_2^3 y - 8}}, \forall x, y \in G.$$

Valoarea parametrului real a pentru care funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2^3 x - a$ este un izomorfism între grupurile (G, \circ) și $(\mathbb{R}, +)$ este:

- a) 1; b) 8; c) 4; d) 0; e) 2; f) Nu știu.

(10p) 8. Dacă

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$$

atunci:

- a) $I = 2(\sqrt{2} - 1)$; b) $I = 2$; c) $I = \sqrt{2} - 1$; d) $I = 3$; e) $I = 1$; f) Nu știu.

(10p) 9. Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \star y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3.$$

Să se determine valoarea parametrului $a \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1^3 \star 2^3 \star \dots \star 9^3 = a^3.$$

- a) 17; b) 18; c) 44; d) 45; e) 200; f) Nu știu.

(10p) 10. În inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, calculați

$$\hat{1}^{2001} + \hat{2}^{2001} + \hat{3}^{2001} + \hat{4}^{2001} + \hat{5}^{2001}.$$

- a) $\hat{0}$; b) $\hat{1}$; c) $\hat{2}$; d) $\hat{3}$; e) $\hat{4}$; f) Nu știu.

(10p) 11. Calculați integrala

$$\int_1^3 x^2[x] dx.$$

- a) $\frac{38}{3}$; b) $\frac{7}{3}$; c) 13; d) 15; e) 17; f) Nu știu.

(10p) 12. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Calculați

$$\int_2^3 \frac{g(x)}{f^4(x)} dx.$$

- a) $\ln \frac{3}{2}$; b) $\ln \frac{10}{3}$; c) $3 \ln \frac{10}{3}$; d) $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\ln^3 5} - \frac{1}{\ln^3 10} \right)$; e) $\frac{5}{\ln^5 5} - \frac{5}{\ln^5 10}$; f) Nu știu.

Răspunsuri:

1. b; 2. a; 3. a; 4. e; 5. c; 6. a; 7. b; 8. a; 9. d; 10. d; 11. d; 12. d.