Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2019, etapa online
Clasa a XI-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10p) **1.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$.

(10p) **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} C_{4n}^{n}$, unde C_m^k reprezintă numărul combinărilor de m luate câte k.

(10p) **3.** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+e^{-x})^x - 1}{(x+e^{x})^x - 1}$.

(10p) **4.** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{e^x - a}$$

să admită asimptote verticale, unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

(10p) **5.** Să se determine valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 123 & 231 & 312 \\ 312 & 123 & 231 \\ 231 & 312 & 123 \end{vmatrix}.$$

(10p) **6.** Să se determine suma elementelor matricei A^{2020}, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10p) **7.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} x & 6 \\ 2 & y \end{pmatrix}$. Să se calculeze $x^2 + y^2$.

(10p) **8.** Să se calculeze $\alpha + L$ ştiind că parametrul real α satisface condiţia

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + \alpha\, x \right) \in \mathbb{R}.$$

(10p) **9.** Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \left[\dfrac{1}{\ln x}\right]$, unde $[x]$ notează partea întreagă a lui x, iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

(10p) **10.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde

$$a_1 > 0 \text{ şi } a_n a_{n+1} = 2a_n^2 + 1,\ \forall\, n \geq 1.$$

(10p) **11.** Fie $A \in \mathcal{M}_{2020}(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă astfel încât determinantul matricei adjuncte este

$$det(A^*) = 2019^{673}.$$

Să se calculeze determinantul matricei A.

(10p) **12.** Ştiind că matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică proprietăţile $det(A - I_2) = 2$ şi $det(A + I_2) = 4$, să se calculeze $det(A) + det(A - 2I_2)$.

Răspunsuri:

1. 1; 2. $+\infty$; 3. 0; 4. $(0,\infty)\setminus\{1\}$; 5. $2\cdot 9^3\cdot 111^2$; 6. -2^{1011}; 7. 5; 8. $-\frac{2}{3}$; 9. -1; 10. $+\infty$; 11. $\sqrt[3]{2019}$; 12. 6.