

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa online
Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnologic, Economic

(10p) **1.** Să se determine valoarea sumei $a + b$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ e^x + b, & x > 0, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x_0 = 0$.

(10p) **2.** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctg x)^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

(10p) **3.** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + e^{-x})^x - 1}{(x + e^x)^x - 1}$.

(10p) **4.** Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + mx + m}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al funcției, iar m este un parametru real nenul. Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui m pentru care f admite o singură asimptotă verticală.

(10p) **5.** Să se determine valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 123 & 231 & 312 \\ 312 & 123 & 231 \\ 231 & 312 & 123 \end{vmatrix}.$$

(10p) **6.** Să se determine suma elementelor matricei A^{2020} , unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10p) **7.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} x & 6 \\ 2 & y \end{pmatrix}$. Să se calculeze $x^2 + y^2$.

(10p) **8.** Să se calculeze $\alpha + L$ știind că parametrul real α satisface condiția

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + \alpha x \right) \in \mathbb{R}.$$

(10p) **9.** Să se studieze existența limitei $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\frac{1}{\ln x} \right]$, unde $[x]$ notează partea întreagă a lui x , iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

(10p) **10.** Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \left(mx + \sqrt{1 + m^2 x^2} \right)^{\frac{1}{m}}$, $m \in (0, \infty)$. Să se determine expresia analitică a funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{\substack{m \rightarrow 0 \\ m > 0}} f_m(x)$.

(10p) **11.** Fie $A \in \mathcal{M}_{2020}(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă astfel încât determinantul matricei adjuncte este

$$\det(A^*) = 2019^{673}.$$

Să se calculeze determinantul matricei A .

(10p) **12.** Știind că matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică proprietățile $\det(A - I_2) = 2$ și $\det(A + I_2) = 4$, să se calculeze $\det(A) + \det(A - 2I_2)$.

Răspunsuri:

1. 0; 2. $\frac{4}{3}$; 3. 0; 4. $\{4\}$; 5. $2 \cdot 9^3 \cdot 111^2$; 6. -2^{1011} ; 7. 5; 8. $-\frac{2}{3}$; 9. -1; 10. $f(x) = e^x$; 11. $\sqrt[3]{2019}$; 12. 6.