Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2019, etapa online
Clasa a X-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10p) **1.** Fie funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + 3$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine toate valorile lui a pentru care funcţia f este injectivă.

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{Z}$ e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ f) $(0, 1)$

(10p) **2.** Fie $u = a + b, v = a\varepsilon + b\varepsilon^2, w = a\varepsilon^2 + b\varepsilon$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $i = \sqrt{-1}$, iar $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea produsului $a \cdot b$, dacă $u^2 + v^2 + w^2 = 4038$.

a) 0 b) 1 c) 11 d) 61 e) 673 f) 2019

(10p) **3.** Se consideră funcţiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1) - \ln x$, $g(x) = e^{f(x)} - 1$. Să se calculeze

$$E = g(2) + g(2^2) + \ldots + g(2^{64}).$$

a) $2^{-64} - 1$ b) $2^{-65} - 2$ c) $2^{-64} - 2$ d) $-2^{-64} + 1$ e) $-2^{-65} + 1$ f) $-2^{-65} + \frac{1}{2}$

(10p) **4.** Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care funcţia reală f,

$$f(x) = \lg\left(4x^2 + (m + 4)x + m + 4\right),$$

are domeniul de definiţie $\mathbb{R}$.

a) $\emptyset$ b) $(-4, 12)$ c) $[-4, 12]$ d) $\mathbb{R}$ e) $(-\infty, -4) \cup (12, \infty)$ f) $(-\infty, -4] \cup [12, \infty)$

(10p) **5.** Să se calculeze $E(2)$, unde

$$E(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt[8]{x}) \cdot \ldots \cdot (1 + \sqrt[2^n]{x})(1 - \sqrt[2^n]{x}),\ x \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}, n \geq 4.$$

a) -1 b) -2 c) -3 d) $1 - \sqrt{2}$ e) $2 - 2\sqrt{2}$ f) $-1 - \sqrt{2}$

(10p) **6.** Fie numerele complexe $z = \cos\dfrac{\pi}{2019} + i\sin\dfrac{\pi}{2019}$ şi $w = \displaystyle\sum_{p=1}^{1009}\left(z^p + z^{2019-p}\right)$. Să se determine modulul lui w.

a) 0 b) 1 c) $\text{ctg}\frac{\pi}{2019}$ d) $\text{ctg}\frac{\pi}{4038}$ e) $\text{ctg}\frac{2\pi}{2019}$ f) $\text{tg}\frac{\pi}{2019}$

(10p) **7.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 3x$. Să se calculeze $f(\frac{2\pi}{5}) + f(\frac{3\pi}{5})$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) $\sqrt{5}$ e) $1 - \sqrt{5}$ f) $1 + \sqrt{5}$

(10p) **8.** Să se determine câte numere complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $|z| = 1$ au proprietatea

$$z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}^*.$$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) o infinitate

(10p) **9.** Să se determine expresia inversei funcţiei $f : (-\infty, 0] \to [1, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, în caz că există.

a) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^3 - 1}$ b) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y^2 - 1}$ c) $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$
d) $f^{-1}(y) = -\sqrt{y^3 - 1}$ e) $f^{-1}(y) = \sqrt{y^3 - 1}$ f) nu există

(10p) **10.** Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care partea întreagă a numărului p este 2019, unde

$$p = \log_2 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 16 \cdot \ldots \cdot \log_{2^n} 2^{n+1}.$$

a) 2020 b) 1009 c) 1010 d) 2018 e) 2019 f) nu există

(10p) **11.** Să se calculeze suma $S = 1 + i^3 + i^6 + i^9 + \ldots + i^{2019}$, unde $i = \sqrt{-1}$.

a) 0 b) 1 c) $1 - i$ d) $-i$ e) i f) $1 + i$

(10p) **12.** Câte numere naturale n au proprietatea $\log_{\sqrt{n}} 1024 \in \mathbb{N}$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 9 f) 12

Răspunsuri:
1. e; 2. e; 3. d; 4. b; 5. a; 6. d; 7. a; 8. a; 9. d; 10. d; 11. c; 12. d.