

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2024 - Varianta A
Clasa a XI-a

(10pt) **1.** Câte numere naturale impare de trei cifre distincte există?

- a) 360 b) 320 c) 324 d) 315 e) 234 f) 280

(10pt) **2.** Fie z un număr complex astfel încât $z^2 - iz - 1 = 0$. Să se calculeze $\left(z^5 + \frac{1}{z^3}\right)^{2025}$.

- a) $-i$ b) -1 c) 0 d) 1 e) i f) 2^{2025}

(10pt) **3.** Fie x_1, x_2 , cu $x_1 > x_2$, soluțiile reale ale ecuației $\sqrt[4]{30-x} + \sqrt[4]{38+x} = 3\sqrt{2}$. Să se calculeze $x_1 - x_2$.

- a) 26 b) 60 c) 4 d) 68 e) 8 f) 72

(10pt) **4.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$. Să se determine punctul de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .

- a) $A(1, 0)$ b) $A(e, \sqrt{e})$ c) $A(e^{-2}, -2)$
d) $A(e^{-2}, -2e^{-1})$ e) $A(1, -2e^{-1})$ f) $A(e^2, 2e)$

(10pt) **5.** În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P și Q împart segmentul (BC) în trei părți egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

6. Punctul $M(-2, 1)$ se rotește în jurul punctului $O(0, 0)$ în sens trigonometric cu 60° , obținându-se astfel punctul $M'(a, b)$. Să se calculeze:

(3p) a) $a^2 + b^2$;

(7p) b) $4a - 2b$.

7. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră matricea

$$X_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

(3p) a) Să se afle cardinalul mulțimii $\mathcal{M} = \{X_{2024}^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

(7p) b) Să se stabilească pentru câte valori ale lui n are loc egalitatea $X_n^{153} = X_n^9$.

8. Se consideră determinantul

$$\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(4p) a) Să se calculeze $\frac{1}{2024} \cdot \Delta(2023, 2024, 2025)$.

(6p) b) Câte triplete (a, b, c) , cu $a, b, c \in \mathbb{Z} \cap [-3, 3]$, verifică relația $\Delta(a, b, c) = 0$?

9. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $x_1 = 2025$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}}$.

(6p) b) Să se determine numărul termenilor șirului mai mici decât 2024^{1024} .

10. Fie $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ o funcție cu proprietatea $f(n+1) > f(f(n))$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

(5p) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln f(n) - \ln(n+1))$;

(5p) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k^2(k+1)}$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 5 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte.

La ultimele 5 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 150 minute.