

Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2024 - Varianta A
Clasa a XII-a

(10pt) **1.** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{9n^2 + 16k - 8}}$.

- a) 0 b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 3

(10pt) **2.** Fie \mathcal{M} mulțimea funcțiilor continue $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a produsului

$$\int_0^1 \sqrt[3]{f(x)} dx \cdot \int_0^1 \sqrt[6]{f(x)} dx \cdot \int_0^1 \sqrt[12]{f(x)} dx$$

atunci când f parcurge mulțimea \mathcal{M} .

- a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) $\frac{1}{6}$ d) 2 e) 12 f) $\frac{7}{2}$

(10pt) **3.** După separarea termenilor raționali de cei iraționali, expresia $E_n = (5 + 2\sqrt{6})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, dezvoltată cu formula binomului lui Newton, devine $E_n = a_n + b_n\sqrt{6}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2a_nb_n}$.

- a) $\sqrt{6}$ b) 1 c) $\frac{7\sqrt{6}}{12}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ e) 0 f) $2\sqrt{6}$

(10pt) **4.** Să se studieze dacă funcția $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}^2$, unde $a = 20,24 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, este integrabilă (prin $\{x\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real x). În caz afirmativ, să se calculeze $\int_0^a f(x) dx$.

- a) $\frac{20}{3} + \frac{81}{25^3}$ b) $7 + \frac{27}{100^3}$ c) $7 + \frac{81}{100^3}$ d) $6 + \frac{72}{100^3}$ e) $\frac{20}{3} + \frac{72}{25^3}$ f) f nu este integrabilă

(10pt) **5.** Să se calculeze integrala $I = \int_{1000}^{1024} \frac{1}{1 + e^{\sqrt{2024-x}-\sqrt{x}}} dx$.

- a) 24 b) 1012 c) e^6 d) 512 e) e^{12} f) 12

6. Pe mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} se definește legea de compoziție

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(3p) a) Să se calculeze $E = i^{2024} \circ i^{2023} \circ i^{2022} \circ \dots \circ i \circ 1 \circ i^{-1}$.

(7p) b) Să se determine toate numerele complexe z pentru care $z^2 \circ (z^2 - 2) = -6$ (răspunsurile se scriu sub formă algebrică).

7. Se consideră funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow E \subset \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{25x - x^2} - \sqrt{33x - x^2 - 200},$$

unde D este domeniul maxim de definiție, iar E , imaginea funcției.

(5p) a) Să se calculeze $\text{card}(E \cap \mathbb{N})$.

(5p) b) Să se studieze dacă funcția f este inversabilă. În caz afirmativ, să se determine rezultatul calculului

$$2 - \frac{19}{4} \cdot (f^{-1})'(8).$$

8. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 7X + \lambda$, unde $\lambda \in \mathbb{Z}$, ale cărei rădăcini sunt notate x_1, x_2 și x_3 .

(6p) a) Pentru $\lambda = 10$, să se calculeze

$$E = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1} \right) \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) (x_1 x_2 x_3^4 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1^4 x_2 x_3).$$

(4p) b) Să se determine parametrul λ așa încât polinomul f să admită o rădăcină dublă întreagă.

9. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad impar,

$$P = c_0 X^{2n+1} + c_1 X^{2n} + \dots + c_{2n+1}, \quad c_0 \neq 0, n \in \mathbb{N},$$

și a, b două numere reale cu $a < b$. Fie $I = \int_a^b P \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx$.

(5p) a) Dacă $c_1 = c_3 = \dots = c_{2n+1} = 0$, să se calculeze I .

(5p) b) Dacă $n = 1, a = 0, b = 1$, se știe că polinomul P are proprietatea că $I = 0$ pentru $c_3 \neq 0$. Să se calculeze în acest caz $\frac{c_1}{c_3}$.

10. În sistemul de coordonate xOy , se consideră punctele $B(b, 0)$ și $C(0, c)$, $b > c > 0$, așa încât distanța dintre origine și dreapta BC să fie egală cu 12, iar perimetrul triunghiului OBC este 60.

(4p) a) Să se determine lungimea segmentului BC .

(6p) b) Dacă lungimea bisectoarei din B a triunghiului OBC este $\frac{m\sqrt{10}}{3}$, să se precizeze m .

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 5 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte.

La ultimele 5 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 150 minute.