Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2025 - Varianta $\boxed{\text{A}}$

Clasa a XI-a

(13pt) **1.** În timp ce rescriau o ecuaţie de gradul al doilea în forma $ax^2+bx+c=0$, Maria şi Andrei au făcut greşeli de scriere a coeficienţilor. Maria a scris incorect coeficientul c, în timp ce a şi b au rămas corecte, iar Andrei a scris incorect coeficientul b, în timp ce a şi c au rămas corecte. Dacă Maria a obţinut soluţiile 6 şi 2, iar Andrei -7 şi -1 şi niciunul dintre ei nu a făcut alte greşeli, care au fost soluţiile corecte ale ecuaţiei iniţiale?

a) -8 şi 7 b) -8 şi 12 c) -6 şi -2 d) -6 şi 2 e) 1 şi 7 f) 1 şi 6

(7pt) **2.** Câte progresii aritmetice de numere naturale conţin şi numărul 3, şi numărul 29?

a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8

(9pt) **3.** Se extrage la întâmplare un număr natural din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2025\}$. Care este probabilitatea ca $[\log_2 n]$ să fie număr par? (Cu $[x]$ se notează partea întreagă a numărului real x.)

a) $\dfrac{682}{2025}$ b) $\dfrac{1012}{2025}$ c) $\dfrac{628}{2025}$ d) $\dfrac{1367}{2025}$ e) $\dfrac{1013}{2025}$ f) $\dfrac{1343}{2025}$

(11pt) **4.** Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele $d_1 : 3x + 4y - 2 = 0$ şi $d_2 : y = mx - \dfrac{1}{m}$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) 1 b) $\dfrac{2}{3}$ c) 2 d) $\dfrac{5}{2}$ e) 3 f) $\dfrac{10}{3}$

(10pt) **5.** Fie o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A) = 2$ şi $A \cdot X = X$, unde $X = \begin{bmatrix} 2024 \\ 2025 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Să se calculeze urma matricei A^{2025}.

a) 4 b) 2^{2025} c) $2^{2025}+1$ d) 2^{2026} e) 4^{2025} f) $4^{2025}+1$

(10pt) **6.** Se consideră modelul de învăţare automată $ax_1 + bx_2 + cx_3 = y$, unde (x_1, x_2, x_3) şi y reprezintă datele de intrare, respectiv ieşire, iar a, b, c sunt ponderile datelor de intrare. Aceste ponderi se determină cunoscând că pentru datele de intrare $(2, 1, 2), (2, 2, 3), (1, -2, -1)$ ieşirile corespunzătoare sunt $-1, 2$, respectiv 4. Ce ieşire va da modelul de mai sus, dacă intrarea este $(2, 0, 1)$?

a) -21 b) -14 c) -4 d) 1 e) 7 f) 24

(8pt) **7.** Fie $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}$. Câte matrice $X \in G$ cu proprietatea $X^{2025} = X$ există?

a) 1 b) 2024 c) 2025 d) 4049 e) 4050 f) o infinitate

(12pt) **8.** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) $2+\sqrt{2}$ e) $2+\sqrt{3}$ f) ∞

(14pt) **9.** Se consideră funcţia bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x}{f^{-1}(x)}$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 2 e) 16 f) 32

(6pt) **10.** Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(0) = f(1) \in [0,1]$. Câte dintre propoziţiile următoare sunt adevărate pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}$?

$P_1 : \exists c \in [0, \frac{1}{2}]$ astfel încât $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$;

$P_2 : \exists c \in [0,1]$ astfel încât $f(c) = 0$;

P_3 : restricţia funcţiei f pe intervalul $(0, \frac{1}{2025})$ este injectivă;

$P_4 : \exists c \in [0,1]$ astfel încât $f(c) = c$;

$P_5 : \exists c \in [0,1]$ astfel încât $f(c) = 1 - c$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La fiecare subiect este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă numărul de puncte precizat, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Punctaj maxim: 100pt

Răspunsurile pe pagina urmatoare.

1. e
2. f
3. f
4. b
5. c
6. c
7. f
8. e
9. e
10. d