Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2026 - Varianta $\boxed{\text{A}}$

Clasa a XI-a

(13pt) **1.** Câte secvenţe binare de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

a) 192 b) 160 c) 128 d) 96 e) 80 f) 64

(14pt) **2.** Prin scrierea alăturată a tuturor numerelor naturale de la 1 la 1000 se obţine numărul

$$1234567891011...9989991000.$$

Determinaţi cifra aflată pe poziţia 2026.

a) 2 b) 0 c) 1 d) 5 e) 7 f) 9

(11pt) **3.** Soluţia ecuaţiei $(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3}$ este fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $2b - 3a$.

a) 9 b) 0 c) -1 d) 3 e) 6 f) 11

(8pt) **4.** Fie $x \in [0, \pi]$ astfel încât $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Calculaţi $\cos^2(2x)$.

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{16}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{8}$

(12pt) **5.** În vârfurile hexagonului ABCDEF se aşază aleator simbolurile @, #, %, *, £, \$, fiecare simbol fiind folosit o singură dată. Calculaţi probabilitatea ca simbolurile # şi * să fie în două vârfuri alăturate ale hexagonului, iar % şi @ să fie tot în două vârfuri alăturate.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

(7pt) **6.** Fie z un număr complex cu proprietatea $z^2 - iz - 1 = 0$. Dacă $\sum_{k=0}^{2026} z^k = ai + bz$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, determinaţi $a + b$.

a) 2 b) 0 c) -2 d) 1 e) -1 f) 3

(10pt) **7.** Un punct variabil de coordonate $(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*$ îşi schimbă poziţia după regula

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă punctul iniţial este $(x_1, y_1) = (2, 1)$, calculaţi $\frac{x_{2026}}{y_{2026}}$.

a) $\frac{6077}{2}$ b) 3039 c) $\frac{6081}{2}$ d) 3040 e) $\frac{6079}{2}$ f) 3041

(9pt) **8.** Fie şirul cu termenul general $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{9^k}, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă limita acestui şir este fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$, determinaţi $a + b$.

a) 50 b) 73 c) 49 d) 17 e) 28 f) 15

(6pt) **9.** Se consideră funcţia $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$. Determinaţi, dacă există, asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $y = \dfrac{1}{2}$ d) $y = \dfrac{3}{2}$ e) $y = -\dfrac{1}{2}$ f) nu există

(10pt) **10.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi punctele $A_n\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$, $B_n\left(n+1, \dfrac{1}{n+1}\right)$, $C_n\left(n+2, \dfrac{1}{n+2}\right)$. Notăm cu $\mathcal{S}_n$ aria triunghiului $A_nB_nC_n$. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{S}_k.$$

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4 f) ∞

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La fiecare subiect este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă numărul de puncte precizat, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Punctaj maxim: 100pt

Răspunsuri:
1. b
2. e
3. a
4. e
5. f
6. b
7. e
8. b
9. b
10. a