Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015

Test clasa a XII-a Secţiunea Ştiinţe ale Naturii - faza de calificare

1. Fie inelul $\mathbb{Z}_6$ şi n numărul soluţiilor ecuaţiei $\widehat{2}x = \widehat{0}$ (în $\mathbb{Z}_6$). Atunci

a) $n = 1$ b) $n = 0$ c) $n = 2$ d) $n = 3$ e) $n = 4$ f) $n = 6$.

2. Pe mulţimea $G = \{2, 4, 6, 8\} \subset \mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie

$$x \star y = \text{ ultima cifră a produsului numerelor întregi } x \text{ şi } y.$$

Atunci

a) G este grup şi simetricul lui 2 este 2
b) G este grup şi simetricul lui 2 este 4
c) G este grup şi simetricul lui 2 este 6
d) G este grup şi simetricul lui 2 este 8
e) G nu este grup
f) G este grup comutativ

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie " $*$ " prin $x * y = x + y - 2$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Dacă $a = (x - 1) * x * (2 - x) * (3 - x)$, atunci a este egal cu:

a) 0 b) 1 c) -2 d) x^2 e) $2x$ f) $3x$.

4. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = xy + x + y$. Rezultatul calculului $1 * \frac{1}{2} * ... * \frac{1}{2015}$ este egal cu:

a) 1 b) 2014 c) 2016 d) 2015 e) $\frac{1}{2015}$ f) $\frac{1}{2015}$.

5. Pe mulţimea $(0; \infty)$ se defineşte operaţia $x * y = x^{\ln y}$, $\forall x, y \in (0; \infty)$. Dacă u este simetricul lui e şi v este simetricul lui $\frac{1}{e}$ in raport cu operaţia dată , iar $S = u + v$, atunci valoarea lui S este:

a) e b) $e + 1$ c) $e - 1$ d) 1 e) $\frac{e+1}{2}$ f) $\frac{e^2+1}{e}$.

6. Determinati elementul neutru al legii definite pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin: $(a, b) \nabla (c, d) = (ac + a + c, bd + b + d)$.

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$ c) $(0, 1)$ d) $(0, 0)$ e) $(-1, 1)$ f) $(-1, -1)$.

7. Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f(x) = \sin x \cos^4 x$, cu $F(0) = 1$, atunci $F(\pi)$ este:

a) 1 b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{6}{5}$ f) $\frac{7}{5}$.

8. Mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 1}$ este:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{\ln(2x^2+1)}{2} + C$ b) $\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(2x^2+1)}{4} + C$
c) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\ln(2x^2+1) + C$ d) $\frac{x^2}{4}\ln(2x^2+1) + C$
e) $\frac{\ln(2x^2+1)}{8} + C$ f) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\ln(2x^2+1) + C$.

9. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{ax+1} + 1\,,\ x \leq -1 \\ 3 + ax\,,\ x > -1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Atunci valoarea parametrului real a pentru care funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ este:

a) 3 b) 4 c) -1 d) 1 e) 0 f) 5.

10. Fie $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$. Atunci numărul $\int\limits_1^e \frac{f^{/}(x) + f(x)}{e^{-x}} dx$ este egal cu:

a) 1 b) e^e c) $e^e - e$ d) $e - 1$ e) $e^2 - 1$ f) $e^e + 1$.

11. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 2x \, dx$ este:

a) $\frac{\pi + \sqrt{3}}{12}$ b) $\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{24}$ c) $\frac{3\pi + \sqrt{3}}{24}$

d) $\frac{\pi + \sqrt{2}}{12}$ e) $\frac{2\pi + \sqrt{2}}{12}$ f) $\frac{2\pi - \sqrt{3}}{24}$.

12. Se consideră integralele I_n, $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$. Atunci:

a) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$ b) $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$ c) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

d) $I_n = \frac{n+1}{n} I_{n-1}$ e) $I_n = \frac{n^2-1}{n^2} I_{n-2}$ f) $I_n = \frac{n-1}{n^2} I_{n-2}$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La fiecare subiect este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspuns corect se acordă 10 puncte, pentru lipsa unui răspuns se acordă 2 puncte, iar pentru un răspuns incorect zero puncte. Timp de lucru 2 ore.