

Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015

Test clasa a IX-a Secțiunea Științe ale Naturii - faza de calificare

1. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și punctele M, N din plan cu proprietățile

$$4\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}, \quad 4\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CB}$$

Să se găsească $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{BD}$.

- a) 1 b) 5 c) 4 d) 2 e) -1 f) 3

2. Nasul lui Pinocchio are 4 cm. După fiecare minciună spusă nasul său crește cu jumătate. Lungimea nasului său după ce a spus 25 de minciuni este:

- a) $\frac{3^{24}}{4^{23}}$ b) $\frac{3^{24}}{4^{24}}$ c) $\frac{3^{24}}{2^{23}}$ d) $\frac{3^{25}}{2^{23}}$ e) $\frac{2^{12}}{3^{24}}$ f) $\frac{4}{2^{25}}$

3. Fie numărul $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Calculați suma $a + a^3 + a^5 + \dots + a^{2015}$.

- a) a^{2016} b) $a^{2016} - 1$ c) $a^{2016} + 1$ d) $\frac{a^{2016} - 1}{a - 1}$ e) $\frac{a^{2016} - 1}{a^2 - 1}$ f) $\frac{a^{2016} - 1}{a - 1} + 1$

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_1 = 2015$ și $x_{n+1} = \frac{n}{x_n}$, pentru orice $n \geq 1$. Să se calculeze produsul $x_1 x_2 \dots x_8$.

- a) 2015 b) 1 c) 2015! d) 8! e) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ f) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$

5. Suma $\left[-\frac{100}{5}\right] + \left[-\frac{99}{5}\right] + \dots + \left[\frac{99}{5}\right] + \left[\frac{100}{5}\right]$ este egală cu

- a) -100 b) -80 c) -20 d) 0 e) 20 f) 100

6. Valoarea expresiei $E = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ pentru $x = a + \frac{1}{a}$, $a > 0$ este

- a) $a + 1$ b) $|a + 1| - 1$ c) a , dacă $a \geq 1$ și $\frac{1}{a}$, dacă $a < 1$
d) 0 e) $1/a$ f) $\frac{1}{a}$, dacă $a < 1$ și a , dacă $a > 1$

7. Să se determine câte laturi are un poligon convex cu 20 de diagonale.

- a) 5 b) 8 c) 10 d) 14 e) 12 f) 9

8. Din cifrele $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ se formează toate numerele de câte 6 cifre astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice. Câte numere se pot forma?

- a) 500 b) 555 c) 600 d) 650 e) 560 f) 565

9. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $g(x) = 3x - 1$. Determinați funcția f dacă $(f \circ g)(x) = 6x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = 2x + 2$ c) $f(x) = 2x + 3$
d) $f(x) = 3x + 1$ e) $f(x) = 3x + 2$ f) $f(x) = 3x + 3$

10. Numărul de funcții cu proprietatea: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5 - f(2) + x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este:

- a) 2 b) 0 c) 1 d) ∞ e) 3 f) 5

11. Fie vectorii \vec{a} și \vec{b} cu proprietatea că $\vec{a} = -3\vec{b}$. Să se calculeze $|\vec{b}|$ dacă $|4\vec{a} + 3\vec{b}| = 9$.

- a) 2 b) 0 c) 1 d) ∞ e) 3 f) 5

12. Fie $ABCD$ este un paralelogram și P este un punct astfel încât $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Dacă $\overrightarrow{BP} = \frac{k}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, atunci k are valoarea

- 1) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 4 f) -4

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La fiecare subiect este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspuns corect se acordă 10 puncte, pentru lipsa unui răspuns se acordă 2 puncte, iar pentru un răspuns incorect zero puncte. Timp de lucru 2 ore.