Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

Clasa a X-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Determinaţi toate valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 + \sqrt{3 - 2^m}, & \text{dacă } x < 3 \\ \log_3(2x-3) + 6 + \sqrt{m}, & \text{dacă } x \geq 3 \end{cases}$$

este bijectivă.

a) $\{1\}$ b) $(0, 1]$ c) $[1, \log_2 3]$ d) $(0, \log_2 3]$ e) $[1, \log_2 3)$ f) nu există

(10pt) **2.** Dacă numerele reale x şi y au proprietatea $2\ln(x - 2y) = \ln x + \ln y$, atunci mulţimea valorilor raportului $\dfrac{x}{y}$ este:

a) $\{1; 3\}$ b) $\{2\}$ c) $\{1; 2\}$ d) $\{1\}$ e) $\{1; 4\}$ f) $\{4\}$

(10pt) **3.** Determinaţi produsul rădăcinilor ecuaţiei $\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{1-3x} = 0$

a) -4 b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{7}{6}$ d) -2 e) $-\dfrac{11}{3}$ f) $\dfrac{1}{3}$

(10pt) **4.** Determinaţi xy, dacă

$$\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12} \\ \arccos x \cdot \arccos y = \dfrac{\pi^2}{24} \end{cases}$$

.

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\sqrt{3}$ e) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\sqrt{2}$

(10pt) **5.** Fie $\sqrt{3} + i$, respectiv $1 - i$ afixele punctelor A şi B. Dacă u este măsura în radiani a unghiului AOB, unde O este originea sistemului de axe de coordonate, atunci $\pi - u$ este

a) $\dfrac{5\pi}{12}$ b) $\dfrac{3\pi}{4}$ c) $\dfrac{11\pi}{12}$ d) $\dfrac{\pi}{12}$ e) $\dfrac{7\pi}{12}$ f) $\dfrac{5\pi}{6}$

(10pt) **6.** Determinaţi cea mai mică valoare a lui $b \in [0, \pi]$ astfel încât există $a \in [0, \pi]$ cu proprietatea $\cos(a + b) = \cos a + \cos b - \dfrac{3}{2}$.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $\dfrac{2\pi}{3}$ e) $\dfrac{3\pi}{4}$ f) $\dfrac{5\pi}{6}$

(10pt) **7.** Dacă suma pătratelor a două numere complexe este 7, iar suma cuburilor lor este 10, care este cea mai mare valoare reală pe care o poate avea suma celor două numere?

(10pt) **8.** Ecuaţia $z^6 + z^3 + 1 = 0$ are exact o rădăcină complexă care are argumentul cuprins între $\dfrac{\pi}{2}$ şi π. Dacă măsura în grade a argumentului acestei soluţii este u°, precizaţi valoarea lui u.

(10pt) **9.** Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \log_{\sqrt[k]{2}} 4^{k+1} = 656$.

10. În triunghiul ABC ecuaţia unei mediane este $x + 7y = 5$, iar ecuaţia unei înălţimi $x + y = -3$. Dacă $A(2, 5)$, determinaţi

(5pt) a) suma ordonatelor celorlalte două vârfuri ale triunghiului ABC, dacă unul dintre ele este situat în cadranul IV;

(5pt) b) produsul ordonatelor celorlalte două vârfuri ale triunghiului ABC, dacă unul dintre ele este situat în cadranul III.

11. În sistemul cartezian de axe de coordonate, mulţimea $\{P(x, y) \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ reprezintă cercul de centru $C(a, b)$ şi rază r.

(4pt) a) Calculaţi produsul absciselor punctelor de intersecţie dintre prima bisectoare şi cercul de centru $C(2, 2)$ şi rază $r = 2$.

(6pt) b) Fie P un punct situat în interiorul sau pe laturile triunghiului echilateral ABC de latură 2. Determinaţi valoarea maximă a sumei $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

12. Două maşini se apropie una de alta pe direcţii perpendiculare, cu viteze constante. La ora 8, distanţa dintre ele este de 10 km.

(3pt) a) Notăm cu p raportul vitezelor lor. Dacă cele două maşini s-ar întâlni după ce au parcurs împreună 14 km, calculaţi $p + \dfrac{1}{p}$.

(7pt) b) Dacă la ora 8 şi un minut distanţa dintre maşini ar fi de $\sqrt{80}$ km, iar după încă un minut de $\sqrt{70}$ km, care va fi distanţa minimă dintre cele două maşini?

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.