Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

Clasa a X-a, Secţiunea Ştiinţe ale Naturii

(10pt) **1.** Dacă $m = \cos\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin 1\right)$, atunci m este:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -1

(10pt) **2.** Fie punctele $O(0,0)$, $A(2,0)$ şi $B(0,2)$. În exteriorul triunghiului OAB se construieşte triunghiul echilateral ABC. Dacă abscisa punctului C este de forma $a+\sqrt{b}$, atunci a^2+b^2 este

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11 f) 12.

(10pt) **3.** Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ are proprietatea $z^3 + 2\overline{z} = 0$, atunci $|z|$ este:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) 4 f) $\sqrt{5}$

(10pt) **4.** Pentru orice număr real a şi orice număr natural nenul k definim

$$C_a^k = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots\big(a-(k-1)\big)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}.$$

Calculaţi $C_{-1/2}^{100} : C_{1/2}^{100}$.

a) -199 b) -197 c) -1 d) 1 e) 187 f) 199

(10pt) **5.** Datele experimentale de forma $(x;y)$, unde $(x;y) \in \{(1;6),(2;18),(3;54{,}01),(4;161{,}9)\}$ sugerează o creştere exponenţială de forma $y = a^x \cdot b$. Care din următoarele numere aproximează cel mai bine valoarea lui y atunci când $x = 2{,}5$?

a) 22 b) 26 c) 31 d) 35 e) 36 f) 40

(10pt) **6.** Experimental, s-a constatat că legea de creştere în timp a numărului de microbi de un anumit tip este $f(t) = 2^{1{,}44t}a$, unde a este numărul iniţial de microbi, iar $f(t)$ este numărul de microbi la momentul de timp t (exprimat în ore). Starea critică a unui pacient infestat cu aceşti microbi se declanşează atunci când numărul acestora depăşeşte 60000. Dacă numărul iniţial de microbi este 1000, aproximativ după câte ore se declanşează starea critică?

a) 1 b) 1, 5 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

(10pt) **7.** Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (m^2-2m+2)x+2$, $g(x) = x-3n+4$, unde $m,n\in\mathbb{R}$. Calculaţi $m+n$ ştiind că $f = g^{-1}$.

(10pt) **8.** Dacă $\log_8(\log_2(x)) = \log_2(\log_8(x))$, aflaţi $(\log_2(x))^2$.

(10pt) **9.** Determinaţi $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n} \log_{5^k} \sqrt[k+1]{5} = \frac{80}{81}$.

10. Două mobile A şi B se îndepărtează rectiliniu de poziţia iniţială plecând simultan în aceeaşi direcţie şi sens. Distanţele faţă de poziţia iniţială sunt date respectiv de legile $f(t) = \sqrt{t^2+24t}$ (m) şi $g(t) = t$ (m), unde $t \geq 0$.

(3pt) a) Care este distanţa (în metri) dintre cele două mobile la momentul $t = 1$?

(7pt) b) La ce valoare a lui t distanţa dintre cele două mobile este de 10 (m)?

11. Fie punctele $O(0,0)$, $A(1,4)$, $B(3,3)$ şi $C(5,0)$.

(3pt) a) Calculaţi aria patrulaterului $OABC$.

(7pt) b) O dreaptă ce trece prin punctul O împarte patrulaterul în două suprafeţe cu arii egale. Această dreaptă intersectează una din laturile patrulaterului în punctul $P\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, unde fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt ireductibile. Calculaţi $a+b+c+d$.

12. Fie punctele $A(1,1)$, $B(3,5)$ şi $C(0,4)$.

(3pt) a) Dacă d este distanţa de la punctul C la dreapta AB, aflaţi d^2;

(7pt) b) Determinaţi ordonata punctului M de pe axa Oy astfel încât suma $MA+MB$ să fie minimă.

Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.