



# Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

## Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii

(10pt) 1. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a)  $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$       b)  $e^{\frac{n}{2}}$       c)  $e^3$       d)  $e^{2n}$       e)  $e^4$       f)  $e^{\frac{n}{3}}$

(10pt) 2. Fie matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \Delta = \det(A^{2015} + B^{2015}).$$

Atunci

- a)  $\Delta = 1$       b)  $\Delta = 2^{2015}$       c)  $\Delta = 4^{2015}$   
d)  $\Delta = 2^{2014}$       e)  $\Delta = 2^{2016}$       f)  $\Delta = 4^{2016}$ .

(10pt) 3. Se consideră mulțimea

$$\mathcal{B} := \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \right\}.$$

Numărul de elemente al mulțimii  $\mathcal{B}$  este:

- a) 1      b) 0      c) 2      d) 4      e) 3      f) 5

(10pt) 4. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + ay - z = -1 \\ x + 2ay + z = 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Fie  $S$  suma valorilor parametrului  $a$  pentru care sistemul este incompatibil. Atunci  $S$  este:

- a)  $S = \frac{1}{2}$       b)  $S = \frac{1}{6}$       c)  $S = -\frac{2}{3}$   
d)  $S = \frac{5}{3}$       e)  $S = -\frac{3}{4}$       f)  $S = -\frac{1}{6}$

(10pt) 5. Suma pătratelor rădăcinilor ecuației

$$\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

este

- a) 53      b) 4      c) 17  
d) 99      e) 55      f) 54

(10pt) **6.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \min \{x^4, x^5, x^6, x^7\}$ . Determinați punctele în care  $f$  nu este derivabilă.

a)  $\{-1, 0, 1\}$   
d)  $\emptyset$

b)  $\{-1, 0\}$   
e)  $\{-1, 1\}$

c)  $\{0, 1\}$   
f)  $0$

(10pt) **7.** Fie funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{x}}$ . Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

(10pt) **8.** Valoarea determinatului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \cos a & 1 + \sin a & 1 \\ 1 - \sin a & 1 + \cos a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este:

(10pt) **9.** Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{a \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi] \end{cases}$$

este continuă pe  $[0, \pi]$ .

(10pt) **10.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție pară și derivabilă. Să se calculeze  $g'(0)$  pentru funcția definită de relația

$$g(x) = \left( \frac{x^3}{3} + 1 \right) f(x) + x.$$

(10pt) **11.** Fie funcția  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\operatorname{tg}^4(x) + 4\operatorname{tg}^2(x) - \frac{2}{\cos^4(x)}$ , unde  $D$  este domeniul de definiție al lui  $f$ . Să se calculeze derivata funcției  $f$ .

(10pt) **12.** Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{2\pi x}{x+1} \right)^{x^2}$ .

**Notă.** Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.