Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

Clasa a XI-a, Secţiunea Tehnologic/Economic

(10pt) **1.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=px-q\sqrt{|x^2-1|}$. Ştiind că funcţia f admite ca asimptote dreptele $y=0$ şi $y=2x$, valorile parametrilor reali p şi q sunt:

a) $(p,q)\in\{(-1,-1);(1,0)\}$ b) $(p,q)\in\{(1,-1);(1,1)\}$ c) $(p,q)\in\{(0,1);(2,1)\}$
d) $(p,q)\in\{(-1,1);(-1,-2)\}$ e) $(p,q)\in\{(-1,2);(2,1)\}$ f) $(p,q)\in\{(2,-1);(-1,2)\}$

(10pt) **2.** Să se determine constantele reale p şi q pentru care matricea

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

satisface relaţia $A^3=pA^2+qA$.

a) $p=-2,q=3$ b) $p=3,q=-2$ c) $p=1,q=4$

d) $p=-2,q=-3$ e) $p=2,q=1$ f) $p=1,q=3$

(10pt) **3.** Se consideră mulţimea

$$\mathcal{B}:=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}):A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Numărul de elemente al mulţimii $\mathcal{B}$ este:

a) 1 b) 0 c) 2 d) 4 e) 3 f) 5

(10pt) **4.** Se consideră sistemul

$$\begin{cases}2ax+y+z=0\\x+ay-z=-1\\x+2ay+z=1\end{cases},\ a\in\mathbb{R}.$$

Fie S suma valorilor parametrului a pentru care sistemul este incompatibil. Atunci S este:

a) $S=\frac{1}{2}$ b) $S=\frac{1}{6}$ c) $S=-\frac{2}{3}$
d) $S=\frac{5}{3}$ e) $S=-\frac{3}{4}$ f) $S=-\frac{1}{6}$

(10pt) **5.** Suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei

$$\begin{vmatrix}4-x&1&4\\1&2-x&2\\2&4&1-x\end{vmatrix}=0$$

este:

a) 53 b) 10 c) 17
d) 99 e) 55 f) 54

(10pt) **6.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \min\{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Determinaţi punctele în care f nu este derivabilă.

a) $\{-1, 0, 1\}$	b) $\{-1, 0\}$	c) $\{0, 1\}$
d) $\emptyset$	e) $\{-1, 1\}$	f) 0

(10pt) **7.** Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(10pt) **8.** Valoarea determinatului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\cos a & 1+\sin a & 1 \\ 1-\sin a & 1+\cos a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este:

(10pt) **9.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{a \sin(x-1)}{x^2-5x+4}, & x \in (1, \pi] \end{cases}$$

este continuă pe $[0, \pi]$.

(10pt) **10.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Să se calculeze $f'(1)$.

(10pt) **11.** Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2\mathrm{tg}^4(x) + 4\mathrm{tg}^2(x) - \dfrac{2}{\cos^4(x)}$, unde D este domeniul de definiţie al lui f. Să se calculeze derivata funcţiei f.

(10pt) **12.** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final(rezultatele finale). Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.