Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

Clasa a XII-a Secţiunea Tehnologic/Economic

(10pt) **1.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8;+;\cdot)$. Soluţiile sistemului $\begin{cases} \widehat{3}x+y=\widehat{2} \\ \widehat{4}x+y=\widehat{5} \end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}_8$ sunt:

a) $(\widehat{3},\widehat{2})$ b) $(\widehat{1},\widehat{6})$ c) $(\widehat{2},\widehat{3})$ d) $(\widehat{5},\widehat{7})$ e) $(\widehat{3},\widehat{1})$ f) $(\widehat{6},\widehat{4})$

(10pt) **2.** Pe $\mathbb{R}$ definim $x\star y=2\mu x+\nu y+xy$. Să se determine μ şi ν pentru care această lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi 0 este element neutru.

a) $\mu=\nu=1$ b) $\mu=1,\ \nu=2$ c) $\mu=2,\ \nu=1$ d) $\mu=\frac{1}{2},\ \nu=1$ e) $\mu=1,\ \nu=\frac{1}{2}$ f) $\mu=\frac{3}{2},\ \nu=\frac{1}{2}$

(10pt) **3.** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=(x-5)(y+5)+5$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Atunci elementul neutru al legii ” $\circ$ ” este

a) 0 b) nu există c) 1 d) -1 e) -2 f) 4

(10pt) **4.** Ştiind că

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{3x+4}dx,\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

să se calculeze $3I_{n+1}+4I_n$

a) $\frac{1}{n+2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{n+1}$ e) $\frac{n+2}{n+4}$ f) $\frac{2}{n+3}$

(10pt) **5.** Mulţimea primitivelor funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$ este

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^2\ln x}{1+x^2}-\ln(1+x^2)\right)+C$ b) $\frac{2x^2\ln x}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+C$

c) $\frac{1}{4}\left(\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^2}-2\ln(1+x^2)\right)+C$ d) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2\ln x}{1+x^2}+6\ln(1+x^2)\right)+C$

e) $\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2\ln x}{1+x^2}+\ln(1+x^2)\right)+C$ f) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^2}{1+x^2}+\ln(1+x^2)\right)+C$

(10pt) **6.** Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$. Valoarea integralei

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$$

este

a) $\frac{2\pi-3}{3}$ b) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{24}$ d) $\frac{\pi-3\sqrt{3}}{16}$ e) $\frac{5\pi}{6}$ f) $\frac{5\pi}{3}$

(10pt) **7.** Fie $f=X^3+\widehat{5}X\in\mathbb{Z}_6[X]$. Determinaţi numărul rădăcinilor polinomului f.

(10pt) **8.** Fie polinomul $f = X^3 - 2aX^2 + aX - 8$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 2$.

(10pt) **9.** Se consideră mulţimea G a matricilor de forma $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 2^x \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^x & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{Z}$. Fie $A(e)$, $e \in \mathbb{Z}$ elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$. Determinaţi numărul întreg y pentru care $A(5) \cdot A(y) = A(e)$.

(10pt) **10.** Să se determine aria mulţimii cuprinse între parabola de ecuaţie $y = x^2$ şi dreapta $y = 3$.

(10pt) **11.** Să se determine valoarea parametrului real a pentru care $I = \dfrac{3}{2} \ln \dfrac{37}{11}$, unde

$$I = \int_2^a \frac{3}{2x+7} dx.$$

(10pt) **12.** Calculaţi

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un raspuns incorect se acordă 0 puncte. Bifarea răspunsului ”Nu stiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.