Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2016, etapa online
Clasa a XII-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi mulţimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \,|A^n = I_2 \right\}.$$

Atunci numarul elementelor mulţimii G este:

a) 2 b) n c) $n+1$ $\boxed{\textbf{d)}}$ n^2 e) $n-1$ f) n^2-1 g) nu ştiu

(10pt) **2.** Fie mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C} | z = (x+y) + i(x-y), x, y \in \mathbb{Z}\}$ ce formează un monoid comutativ împreuna cu operaţia de înmulţire. Suma soluţiilor din M ale ecuaţiei $z^2 = 2i$ este:

$\boxed{\textbf{a)}}$ 0 b) $2i$ c) 2 d) $1+i$ e) $1-i$ f) $2-i$ g) nu ştiu

(10pt) **3.** Fie $\mathbb{Z}_8$ mulţimea claselor de resturi modulo 8 înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire. Precizaţi numărul n al soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{7}y = \widehat{3} \\ \widehat{2}x + \widehat{4}y = \widehat{6} \end{cases}$.

$\boxed{\textbf{a)}}$ $n=2$ b) $n=8$ c) $n=1$ d) $n=0$ e) $n=6$ f) $n=4$ g) nu ştiu

(10pt) **4.** Fie $\mathbb{Z}_9$ mulţimea claselor de resturi modulo 9 înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire. Precizaţi care din următoarele proprietăţi este verificată de matricea $M = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{7} \\ \widehat{1} & \widehat{5} \end{pmatrix}$.

a) M este divizor al lui $\widehat{0}$ b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{6} & \widehat{4} \\ \widehat{1} & \widehat{2} \end{pmatrix}$. c) $M^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{1} \\ \widehat{7} & \widehat{5} \end{pmatrix}$.

d) M nu este inversabilă e) $detM = \widehat{1}$ $\boxed{\textbf{f)}}$ $M^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{4} & \widehat{7} \\ \widehat{1} & \widehat{6} \end{pmatrix}$. g) nu ştiu

(10pt) **5.** Pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim legea de compoziţie "$\star$" prin $x \star y = 5xy + 10(x+y) + 18$. Soluţiile ecuaţiei $\log_2 x \star \log_4 x = -2$ sunt:

a) 4 şi 16 b) 1 şi 2 c) 2 şi 4 d) e şi e^2 $\boxed{\textbf{e)}}$ $\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{16}$ f) 1 şi e g) nu ştiu

(10pt) **6.** Pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\star$" prin $x \star y = xy - 9(x+y) + 90$. Valoarea lui $E = \log_2 3 \star \log_2 4 \star ... \star \log_2 2016$ este:

a) $E=0$ b) $E=90$ c) $E=900$ $\boxed{\textbf{d)}}$ $E=9$ e) $E=2015$ f)$E=2016$ g) nu ştiu

(10pt) **7.** Fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, \text{daca} x \in [0,1] \\ a, \text{daca} x \in (1,2] \end{cases}$. Valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\int\limits_0^2 f(x)dx = \frac{3a^2}{2}$ sunt:

a) $2; \frac{1}{2}$ b) $-1; 3$ **c)** $1; -\frac{1}{3}$ d) ± 1 e) $-3; 1$ f) nu există g) nu ştiu

(10pt) **8.** Mulţimea primitivelor funcţiei $f : (-\infty, \frac{1}{4}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-4x}}$ este:

a) $\frac{-(2x-3)\sqrt{1-4x}}{4} + C$ b) $\frac{(3x+5)\sqrt{1-4x}}{2} + C$ **c)** $\frac{(-2x-1)\sqrt{1-4x}}{6} + C$
d)$-\frac{(x-2)\sqrt{1-4x}}{5} + C$ e) $\frac{(4x-1)\sqrt{1-4x}}{4} + C$ f) $\sqrt{1-4x} + C$ g) nu ştiu

(10pt) **9.** Studiaţi primitivabilitatea funcţiei $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$. În caz afirmativ, o primitivă a funcţiei este:

a) $F(x) = \left|\frac{2}{3}\sqrt{x-1}\right|(x-1)$

b) $F(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{x-1}\right)(x-1) - \frac{1}{3}, x \in [1, 2] \\ \left(\frac{2}{3}\sqrt{x-1} - 1\right)(x-1) + \frac{1}{3}, x \in (2, 5] \end{cases}$

c) f nu este primitivabilă

d)$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

e) $F(x) = \left|\frac{3}{2}\sqrt{x-1} - 1\right|(x-1)$

f) $F(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{x-1}\right)(x-1) + \frac{2}{3}, x \in [1, 2] \\ \left(\frac{2}{3}\sqrt{x-1} - 1\right)(x-1) - \frac{2}{3}, x \in (2, 5] \end{cases}$

g) nu ştiu

(10pt) **10.** Se consideră funcţiile $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x, x \in [-2, -1) \\ 3x - 3, x \in [-1, 1] \end{cases}$ şi $g : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)f(x)$. Precizaţi care din următoarele afirmaţii este corectă:

a) $\int\limits_{-2}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}$

b) g nu este primitivabilă

c) $\int\limits_{-2}^{1} g(x)dx = -7$

d) f nu este integrabilă

e) $G(x) = \begin{cases} -x^3 - x^2 + x, x \in [-2, -1) \\ x^3 - 3x - 1, x \in [-1, 1] \end{cases}$, este o primitiva a lui g

f) $\int\limits_{-2}^{1} g(x)dx = 7$

g) nu ştiu

(10pt) **11.** Să se calculeze limita: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + 2\sqrt[n]{e^2} + \ldots + n\sqrt[n]{e^n}}{n^2}$.

a) 0 b) ∞ c) -1 **d)** 1 e) e f)e^{-1} g) nu ştiu

(10pt) **12.** Fie funcţia $f(x) = \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. Să se determine acea primitivă F a lui f, pentru care $F\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = 4\pi + \frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{a)}}$ $F(x) = \sqrt{x} + \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2} + \frac{15\pi}{4}$

b) $F(x) = \sqrt{x} + \frac{\cos(2\sqrt{x})}{2} + \frac{\pi}{4}$

c)$F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{\cos(2\sqrt{x})}{4} + \frac{13\pi}{4}$

d) $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{\sin(2\sqrt{x})}{4} + \frac{15\pi}{4}$

e) $F(x) = \sqrt{x} + \frac{\cos(2\sqrt{x})}{4} + \frac{15\pi}{4}$

f)$F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2} + \frac{15\pi}{4}$

g) nu ştiu