

**Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2016, etapa online**  
**Clasa a X-a, Secțiunea Matematică-Informatică**

(10pt) **1.** Fie funcția  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  și afirmațiile:

- $a_1 : f$  este funcție periodică pentru  $D = \mathbb{R}$ ;  $a_2 : f$  este funcție mărginită pentru  $D = \mathbb{R}$ ;  
 $a_3 : f$  este funcție crescătoare pentru  $D = [2\pi, \frac{5\pi}{2}]$ ;  $a_4 : f$  este funcție injectivă pentru  $D = [\pi, 2\pi]$ ;  
 $a_5 : f$  este funcție impară pentru  $D = [0, 2\pi]$ ;  $a_6 : \text{Im } f = [-1, 1]$  pentru  $D = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

Câte dintre afirmațiile de mai sus sunt corecte?

- a) 2      b) 1      c) 3      **d) 4**      e) nu știu      f) 6      g) 5

(10pt) **2.** Dacă  $a, b, c > 1$  și  $m, n, p \geq 2$ , valoarea expresiei  $E = \log_{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c}}(a^{mp} \cdot b^{np} \cdot c^{mn})$  este:

- a)  $mnp$**       b)  $\frac{1}{mnp}$       c)  $\frac{mnp}{m+n+p}$       d)  $\frac{m+n+p}{mnp}$   
 e)  $(m+n+p)^2$       f)  $\sqrt{mnp}$       g) nu știu

(10pt) **3.** Se consideră punctele  $A(m^2 - 2i)$ ,  $B(-m^2 + i)$ ,  $C(-3 + 2i)$ ,  $D(\sqrt{3}m - i)$ . Mulțimea valorilor lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $ABCD$  este paralelogram este:

- a)  $\emptyset$       b)  $[-1, 1]$       c)  $\{-1, 1\}$       d) nu știu  
**e)  $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\}$**       f)  $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$       g)  $\{0\}$

(10pt) **4.** Fie funcția  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lg(3\sqrt{10} - \sqrt{10^x - 10})$ , unde  $D$  este domeniul maxim de definiție. Câte elemente conține  $D \cap \mathbb{N}$ ?

- a) nu știu      b) 0      **c) 1**      d) 2      e) 3      f) 10      g)  $\infty$

(10pt) **5.** Ce relație există între numerele  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  și  $b \in (0, \infty) \setminus \{2\}$ , știind că  $\log_a \frac{a}{2} = \log_{\frac{1}{2}} b$ ?

- a)  $2ab = 1$       b)  $4ab = 1$       c)  $ab = 4$       **d)  $ab = 2$**   
 e)  $a = 2b$       f)  $b = 2a$       g) nu știu

(10p) **6.** Să se calculeze valoarea sumei

$$\text{arcctg}(-2016) + \text{arcctg}(-2015) + \dots + \text{arcctg } 2015 + \text{arcctg } 2016.$$

- a) 0      b) nu știu      c)  $\frac{\pi}{2}$       d)  $1008\pi$       e)  $2016\pi$       **f)  $\frac{4033\pi}{2}$**       g)  $-\frac{\pi}{2}$

(10p) **7.** Suma soluțiilor ecuației  $\lg(x - 5)^2 + \lg(x + 6)^2 = 2$  este:

- a)  $-1$       b)  $-1 + 2\sqrt{161}$       c) nu știu      **d)  $-2$**   
 e)  $4 + \sqrt{161}$       f) 1      g) 9

(10p) 8. Să se determine valoarea expresiei  $E = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + i\right)^4 \cdot \left(1 + i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}\right)^4$ .

- a) -4      b) 4      c) 16      d) 32      e) nu știu      **f)** -64      g) 64

(10p) 9. Fie  $x, y, z \in \mathbb{N}$ . Să se determine  $x + y + z$  astfel încât să aibă sens radicalii

$$\sqrt[1+2x-y^2]{\sqrt[1+2y-z^2]{\sqrt[1+2z-x^2]{8 - (x + y + z)}}}}$$

- a)** 3      b) 4      c) 5      d) 6      e) 7      f) 8      g) nu știu

(10p) 10. Dacă  $z \in \mathbb{C}^*$  este o soluție a ecuației  $z^5 + 2016\bar{z} = 0$ , atunci  $z\bar{z}$  este:

- a) 0      b) nu știu      c) 2016      **d)**  $\sqrt{2016}$   
 e)  $\sqrt[4]{2016}$       f)  $2016^{-\frac{1}{2}}$       g)  $2016^{-1}$ .

(10p) 11. Fie  $z_1, z_2$  rădăcinile ecuației  $z^2 - z + 1 = 0$ , iar  $z_3, z_4$  rădăcinile ecuației  $z^2 + z + 1 = 0$ . Să se determine toate numerele întregi  $n$  pentru care  $z_1^n + z_2^n = z_3^n + z_4^n$ .

- a)  $3k + 1$       b)  $3k + 2$       c) nu știu      d)  $4k$   
**e)**  $2k$       f)  $4k + 2$       g)  $6k + 2, k \in \mathbb{Z}$

(10p) 12. Fie  $z, w \in \mathbb{C}$  astfel încât  $\operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im} w > 0$ . Să se determine valoarea numărului real  $x$  pentru care valoarea expresiei  $E = |z - x| + |w - x|$  este minimă.

- a)**  $\frac{z \cdot w - \bar{z} \cdot \bar{w}}{z - \bar{z} + w - \bar{w}}$       b)  $\frac{z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w}{z + \bar{z} + w + \bar{w}}$       c)  $\operatorname{Re} z$       d)  $\frac{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w}{z - \bar{z} + w - \bar{w}}$   
 e)  $\frac{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w}{z - \bar{z} - w + \bar{w}}$       f) nu știu      g)  $\frac{1}{2}(\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w)$